RELATIVITÀ GENERALE - SCRITTO 18-2-2013

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, x, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = -dt^2 + 2z^2 dt dz + (y+z)dx^2 + dy^2 + dz^2 \,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^t_{xx} \neq 0\,, \qquad \Gamma^t_{zz} = -\frac{2z}{1+z^4}\,, \qquad \Gamma^y_{xx} = -\frac{1}{2}\,,$$

$$\Gamma^x_{xy} = \frac{1}{2(y+z)}\,, \quad \Gamma^x_{xz} = \frac{1}{2(y+z)}\,, \quad \Gamma^z_{xx} = -\frac{1}{2(1+z^4)}\,, \quad \Gamma^z_{zz} = \frac{2z^3}{(1+z^4)}\,,$$

1. Calcolare il simbolo di Christoffel Γ^t_{xx}.
2. Dato il tensore T, di componenti nel riferimento O

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ y & 0 & 2z & 0 \\ -z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x+y) \end{pmatrix}.$$

   calcolare le componenti $T_\mu{}^\nu$.
3. Calcolare $T^{zx}{}_{;x}$.
4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (u, v, r, f)$, definito dalla trasformazione di coordinate, valida per $f > 0$:

$$\begin{array}{rcl} u &=& t \\ v &=& 2x \\ r &=& y \\ f &=& z^2 \end{array},$$

   calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

Soluzione

La metrica e la metrica inversa sono

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & z^2 \\ 0 & (y+z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ z^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+z^4} & 0 & 0 & \frac{z^2}{1+z^4} \\ 0 & \frac{1}{y+z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \frac{z^2}{1+z^4} & 0 & 0 & \frac{1}{1+z^4} \end{pmatrix}.$$

1.

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{xx} &= \frac{1}{2}\left[g^{tt}\left(2g_{tx,x} - g_{xx,t}\right) + g^{tz}\left(2g_{zx,x} - g_{xx,z}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2}g^{tz}g_{xx,z} = -\frac{z^2}{2(1+z^4)}. \end{aligned}$$

2.

$$T_\mu{}^\nu = g_{\alpha\mu}T^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 & z^2(x+y) \\ y(y+z) & 0 & 2z(y+z) & 0 \\ -z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xz^2 & 0 & (x+y) \end{pmatrix}.$$

3.

$$T^{xz}{}_{;x} = T^{xz}{}_{,x} + \Gamma^x_{x\mu}T^{\mu z} + \Gamma^z_{x\mu}T^{x\mu} = \Gamma^x_{xz}T^{zz} = \frac{y+x}{2(y+z)}.$$

4. La matrice cambiamento di coordinate è:

$$(\Lambda^{\alpha'}{}_\mu) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$T^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha\prime}_{\ \ \mu} T^{\mu\nu} \Lambda^{\beta\prime}_{\ \ \nu}$$

quindi definendo le matrici $T = (T^{\mu\nu})$, $T' = (T^{\alpha'\beta'})$, $\Lambda = (\Lambda^{\alpha\prime}_{\ \ \mu})$, si trova

$$\begin{aligned}
T' &= \Lambda T \Lambda^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ y & 0 & 2z & 0 \\ -z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y+x \end{pmatrix} \Lambda^T
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 4z & 0 \\ -z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z(x+y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2x & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 4z & 0 \\ -z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4z^2(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v & 0 & 0 \\ 2r & 0 & 4\sqrt(f) & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4f(r+v/2) \end{pmatrix}.$$