RELATIVITÀ GENERALE - SCRITTO 1-7-2013

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{M}{r}\right) dr^2 + dy^2 - 2dydz + z^2 e^z dz^2 \,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^r_{rr} \neq 0 \qquad \Gamma^r_{tt} = +\frac{M}{2r^2\left(1 + \frac{M}{r}\right)} \qquad \Gamma^t_{tr} = \frac{M}{2r^2\left(1 - \frac{M}{r}\right)} \,,$$

$$\Gamma^y_{zz} = \Gamma^z_{zz} = \frac{1}{2}\frac{ze^z(2+z)}{z^2e^z - 1}$$

1. Calcolare il simbolo di Christoffel Γ^r_{rr}.
2. Dato il tensore T, di componenti nel riferimento O
$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,.$$
calcolare le componenti $T_\mu{}^\nu$.
3. Calcolare $T^{tz}{}_{;r}$.
4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', z')$, definito dalla trasformazione di coordinate
$$\begin{array}{rcl} t' & = & t \\ x' & = & 3r \\ y' & = & 2y - z \\ z' & = & z \end{array} \,,$$
calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

Soluzione

La metrica e la metrica inversa sono

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1+\frac{M}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & z^2e^z \end{pmatrix},$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1/\left(1-\frac{M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\left(1+\frac{M}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{e^z z^2}{e^z z^2-1} & \dfrac{1}{e^z z^2-1} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{e^z z^2-1} & \frac{1}{e^z z^2-1} \end{pmatrix}.$$

1.

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{r\alpha}\left[2g_{\alpha r,r} - g_{rr,\alpha}\right] = \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,r} = -\frac{M}{2r^2(1+M/r)}.$$

2.

$$T_\mu{}^\nu = g_{\alpha\mu}T^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -r^2\left(1-\frac{M}{r}\right) & 0 & 0 & -y\left(1-\frac{M}{r}\right) \\ 0 & 0 & z\left(1+\frac{M}{r}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & z^2e^z \end{pmatrix}.$$

3.

$$T^{tz}{}_{;r} = T^{tz}{}_{,r} + \Gamma^t_{\mu r}T^{\mu z} + \Gamma^z_{\mu r}T^{t\mu} = \Gamma^t_{tr}T^{tz} = \frac{My}{2r^2(1-M/r)}.$$

4. Detta $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\right)$ e $\Lambda^{-1} = (\Lambda^{\alpha\prime}{}_\mu) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^\mu}\right)$, si ha

$$T^{\alpha'\beta'} = (\Lambda^{\alpha\prime}{}_\mu)(\Lambda^{\beta\prime}{}_\nu)T^\mu;$$

cioè

$$T' = \Lambda^{-1}T(\Lambda^{-1})^T.$$

La matrice Λ^{-1} è

$$\Lambda^{-1} = (\Lambda^{\alpha\prime}_{\ \mu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Quindi si trova

$$\begin{aligned} T' = \ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 3z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2 & 0 & -y & y \\ 0 & 0 & 6z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(x')^2}{9} & 0 & -\frac{1}{2}(y'+z') & \frac{1}{2}(y'+z') \\ 0 & 0 & 6z' & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$