RELATIVITÀ GENERALE - SCRITTO 8-9-2014

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, x, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = -(1+t^2)dt^2 + x^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2xydxdy\,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^t_{tt} = \dfrac{t}{1+t^2} & \Gamma^x_{xx} = \dfrac{1}{x} & \Gamma^x_{xy} = -\dfrac{y}{x^2-y^2} \\
\Gamma^x_{zz} \neq 0, & \Gamma^y_{xy} = \dfrac{x}{x^2-y^2}, & \\
\Gamma^y_{zz} = \dfrac{y}{x^2-y^2}, & \Gamma^z_{xz} = \dfrac{1}{x}\,. &
\end{array}$$

1. Calcolare il simbolo di Christoffel Γ^x_{zz}.
2. Dato il tensore T, di componenti nel riferimento O

$$T^\mu_{\ \nu} = \begin{pmatrix} 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & y \\ z & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix}\,.$$

   calcolare le componenti $T^{\mu\nu}$.
3. Calcolare $T^x{}_{z;y}$.
4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (u, x', y', z')$, definito dalla trasformazione di coordinate, definita per $t > 0$

$$\begin{array}{rcl} u &=& \ln(t) \\ x' &=& x \\ y' &=& y \\ z' &=& z \end{array}\,,$$

   calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'}{}_{\nu'}$ nel riferimento O'.

Soluzione

La metrica e la metrica inversa sono

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -(1+t^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & xy & 0 \\ 0 & xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix},$$

e, ponendo $A = x^2 - y^2$,

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{1+t^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/A & -y/(xA) & 0 \\ 0 & -y/(xA) & 1/A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/x^2 \end{pmatrix}.$$

1.

$$\Gamma^x_{zz} = \frac{1}{2} g^{x\alpha} \left[2 g_{\alpha z,z} - g_{zz,\alpha} \right] = -\frac{1}{2} g^{xx} g_{zz,x} = -\frac{x}{x^2 - y^2}.$$

2.

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu}{}_{\alpha} g^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 0 & t^2/A & -yt^2/(xA) & 0 \\ 0 & x^2/A & -xy/A & y/x^2 \\ -z/(1+t^2) & -y^3/(xA) & y^2/A & 0 \\ 0 & -y^2/(xA) & y/A & 0 \end{pmatrix}.$$

3.

$$T^x{}_{z;y} = T^x{}_{z,y} + \Gamma^x_{\alpha y} T^\alpha{}_z - \Gamma^\alpha_{zy} T^x{}_\alpha = T^x{}_{z,y} + \Gamma^x_{xy} T^x{}_z = \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 - y^2}.$$

4. Dette $\Lambda = (\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}) = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}\right)$ e $\Lambda^{-1} = (\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}) = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\right)$, si ha

$$T^{\alpha'}{}_{\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\beta'};$$

cioè

$$T' = \Lambda T \Lambda^{-1}.$$

Le matrici Λ e Λ^{-1} sono

$$\Lambda = (\Lambda^{\nu}{}_{\beta\prime}) = \begin{pmatrix} 1/t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

e

$$\Lambda^{-1} = (\Lambda^{\alpha\prime}_{\ \mu}) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Quindi si trova

$$\begin{aligned} T' = \; &= \begin{pmatrix} 1/t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & y \\ z & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & y \\ zt & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & y \\ zt & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^u & 0 & 0 \\ 0 & x'^2 & 0 & y' \\ z'e^u & 0 & y'^2 & \\ 0 & 0 & y' & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$