RELATIVITÀ GENERALE - SCRITTO 30-6-2014

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, x, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = -\frac{1}{t^2}dt^2 + 6tdtdx + t^2dx^2 + y^2dy^2 + z^2dz^2 \,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^t_{tt} = \tfrac{9t^2-1}{t(9t^2+1)}\,, \quad \Gamma^t_{tx} = \tfrac{3t^2}{(9t^2+1)}\,, \quad \Gamma^t_{xx} = \tfrac{t^3}{(9t^2+1)}\,,$$

$$\Gamma^x_{tt} = \tfrac{6}{t^2(9t^2+1)}\,, \quad \Gamma^x_{tx} = \tfrac{1}{t(9t^2+1)}\,, \qquad \Gamma^x_{xx} \neq 0\,,$$

$$\Gamma^y_{yy} = \tfrac{1}{y}\,, \qquad \Gamma^z_{xz} = \tfrac{1}{z}\,,$$

1. Calcolare il simbolo di Christoffel Γ^x_{xx}.
2. Dato il tensore T, di componenti nel riferimento O
$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 & t \\ y & 0 & 2z & 0 \\ -x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y+z \end{pmatrix}.$$
calcolare le componenti $T^\mu{}_\nu$.
3. Calcolare $T^{yt}{}_{;x}$.
4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', z')$, definito dalla trasformazione di coordinate
$$\begin{array}{rcl} t &=& t' \\ x &=& x' \\ y &=& t' + y'^2 \\ z &=& z' \end{array},$$
definita per $y - t \geq 0$. Calcolare le componenti del tensore metrico $g_{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

Soluzione

La metrica e la metrica inversa sono

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{t^2} & 3t & 0 & 0 \\ 3t & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix},$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\dfrac{t^2}{9t^2+1} & \dfrac{3t}{9t^2+1} & 0 & 0 \\[2ex] \dfrac{3t}{9t^2+1} & \dfrac{1}{t^2(9t^2+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{z^2} \end{pmatrix}.$$

1.

$$\begin{aligned} \Gamma^x_{xx} &= \frac{1}{2} g^{xk} \left(2 g_{kx,x} - g_{xx,k}\right) \\ &= \frac{1}{2} g^{xt} \left(2 g_{tx,x} - g_{xx,t}\right) + \frac{1}{2} g^{xx} \left(2 g_{xx,x} - g_{xx,x}\right) \\ &= -\frac{1}{2} g^{xt} g_{xx,t} = -\frac{3t^2}{(9t^2+1)}. \end{aligned}$$

2.

$$T^{\mu}_{\ \nu} = T^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 3t^3 & 0 & tz^2 \\[2ex] -\dfrac{y}{t^2} & 3ty & 2y^2 z & 0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{t^2} & -3tx^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^2(y+z) \end{pmatrix}.$$

3.

$$T^{yt}{}_{;x} \;=\; T^{yt}{}_{,x} + \Gamma^y_{kx} T^{kt} + \Gamma^t_{kx} T^{yk} = -2x + \Gamma^t_{tx} T^{yt} = -\frac{x(18t^2 + 2 + 3t^2 x)}{(9t^2+1)} \,.$$

4. Detta $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\right)$ la matrice del cambiamento di coordinate, data da

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2y' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

si ha

$$g_{\alpha'\beta'} = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \Lambda^\nu{}_{\beta'} g_{\mu\nu} \,,$$

quindi definendo le matrici $g = (T_{\mu\nu})$, $g' = (T_{\alpha'\beta'})$, e detta Λ^T la trasposta di Λ

$$g' = \Lambda^T g \Lambda = \Lambda^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} & 3t & 0 & 0 \\ 3t & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2y' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} & 3t & 0 & 0 \\ 3t & t^2 & 0 & 0 \\ y^2 & 0 & 2y^2 y' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} + y^2 & 3t & 2y^2 y' & 0 \\ 3t & t^2 & 0 & 0 \\ 2y^2 y' & 0 & 4y^2 y'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{t'^2} + (t' + y'^2)^2 & 3t' & 2(t' + y'^2)^2 y' & 0 \\ 3t' & t'^2 & 0 & 0 \\ 2(t' + y'^2)^2 y' & 0 & 4(t' + y'^2)^2 y'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$$