# INTRODUZIONE ALLA RELATIVITÀ GENERALE
# PROVA SCRITTA
# 11-9-06

## PARTE I

Sia data la metrica, nel riferimento $O$ di coordinate $\{x^\mu\} = \{t, x, y, z\}$,

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2t}(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,.$$

Sia dato il vettore $\vec{V}$ di componenti, nel riferimento $O$,

$$V^\alpha = (0, -y, x, 0)\,.$$

Sia dato il riferimento $O'$ di coordinate $\{x'^\alpha\} = \{u, r, \phi, \zeta\}$ definite dalla trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} t &= -\ln u \\ x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= \zeta\,. \end{aligned}$$

I simboli di Christoffel non nulli, nel riferimento $O'$, sono

$$\begin{array}{lll} \Gamma^u_{uu} = -\frac{1}{u} & \Gamma^u_{\phi\phi} = -\frac{r^2}{u} & \Gamma^\phi_{\phi u} = -\frac{1}{u} \\ \\ \Gamma^r_{\phi\phi} = -r & \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r} & \Gamma^u_{rr} = -\frac{1}{u} \\ \\ \Gamma^r_{ru} = -\frac{1}{u} & \Gamma^u_{\zeta\zeta} = -\frac{1}{u} & \Gamma^\zeta_{u\zeta} = -\frac{1}{u}\,. \end{array}$$

1. Esprimere la metrica nel riferimento $O'$.
2. Determinare le componenti di $\vec{V}$ nel riferimento $O'$.
3. Dato il tensore $T$ che in $O'$ ha le seguenti componenti

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ 1 & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si calcoli la componente $T^{rr}{}_{;u}$ della derivata covariante.

# PARTE II

Sia data la metrica, nel riferimento $O$ di coordinate $\{x^\mu\} = \{t, x, y, z\}$,

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2t}(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,.$$

I simboli di Christoffel non nulli, nel riferimento $O$, sono

$$\begin{array}{c} \Gamma^t_{xx} = \Gamma^t_{yy} = \Gamma^t_{zz} \\ \Gamma^x_{xt} = \Gamma^y_{yt} = \Gamma^z_{zt}\,. \end{array}$$

Sia dato il vettore $\vec{V}$ di componenti, nel riferimento $O$,

$$V^\alpha = (0, 1, 0, 0)\,.$$

Sia dato il cammino $\mathcal{C}$ lungo la curva

$$t = y = z = 0$$

dal punto $P$ di coordinate $(0, 0, 0, 0)$ al punto $Q$ di coordinate $(0, 1, 0, 0)$.

1. Calcolare i simboli di Christoffel.
2. Trasportare parallelamente il vettore $\vec{V}$ dal punto $P$ al punto $Q$ lungo il cammino $\mathcal{C}$.

---

# Domanda teorica

Dato il generico tensore energia-impulso $T^{\alpha\beta}$ spiegare perche' l'equazione $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$, valida in spaziotempo piatto e' una legge di conservazione, mentre $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$, valida in spaziotempo curvo, non lo e'.

---

## ATTENZIONE

- Chi ha superato il primo esonero svolgerà solo la seconda parte del compito.
- Chi ha superato il secondo esonero svolgerà solo la prima parte.
- Chi non ha fatto gli esoneri svolgerà entrambe le parti.
- Chi fa solo una parte del compito, relativa all'esonero mancante o andato male, deve dichiararlo SUBITO, al momento del controllo dei documenti.
- Chi fa solo una parte del compito deve uscire dopo due ore, pena l'annullamento.
- Il compito annulla gli esoneri precedenti.

# SOLUZIONE

# PARTE I

## 1

Determiniamo l'espressione della metrica nel riferimento $O'$.

$$\begin{aligned} e^{2t} &= \frac{1}{u^2} \\ dt &= -\frac{1}{u}du \\ dx &= \cos\phi dr - r\sin\phi d\phi \\ dy &= \sin\phi dr + r\cos\phi d\phi \\ dz &= d\zeta \end{aligned}$$

quindi

$$ds^2 = \frac{1}{u^2}\left[-du^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + d\zeta^2\right] .$$

## 2

La matrice che descrive il cambiamento di coordinate è

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} \equiv \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha\prime}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La sua inversa è

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^{\mu}} = \begin{pmatrix} -u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r}\sin\phi & \frac{1}{r}\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Per determinare le componenti del vettore $\vec{V}$ nel riferimento $O'$, prima di tutto esprimiamo le sue componenti nel riferimento $O$ in termini delle coordinate di $\{x^{\alpha'}\}$,

$$V^{\mu} = (0, -y, x, 0) = (0, -r\sin\phi, r\cos\phi, 0)$$

poi le moltiplichiamo per l'opportuna matrice di cambiamento di coordinate:

$$V^{\alpha\prime} = \Lambda^{\alpha\prime}{}_{\mu} V^{\mu} = \begin{pmatrix} -u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r}\sin\phi & \frac{1}{r}\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

quindi

$$(V^u, V^r, V^\phi, V^\zeta) = (0, 0, 1, 0) .$$

## 3

$$T^{rr}{}_{;u} = T^{rr}{}_{,u} + T^{\alpha r}\Gamma^{r}{}_{\alpha u} + T^{r\alpha}\Gamma^{r}{}_{\alpha u} = 2\ T^{\alpha r}\Gamma^{r}{}_{\alpha u} == -\frac{2\ \cos\phi}{u} .$$

# PARTE II

È sufficiente calcolare $\Gamma^t_{xx}$ e $\Gamma^x_{tx}$ (poichè come è detto nel testo i simboli con $y$ e $z$ al posto di $x$, sono uguali a questi).

Essendo $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, e^{2t}, e^{2t}, e^{2t})$, si ha

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{xx} &= \frac{1}{2} g^{t\mu} \left( g_{x\mu,x} + g_{\mu x,x} - g_{xx,\mu} \right) = -\frac{1}{2} g^{tt} g_{xx,t} = e^{2t} \\ \Gamma^x_{tx} &= \frac{1}{2} g^{x\mu} \left( g_{t\mu,x} + g_{\mu x,t} - g_{tx,\mu} \right) = \frac{1}{2} g^{xx} g_{xx,t} = 1 . \end{aligned}$$

Il cammino $\mathcal{C}$ è definito lungo una linea coordinata $x$, quindi l'equazione delle geodetiche lungo di esso è

$$V^{\mu}_{;x} = V^{\mu}_{,x} + \Gamma^{\mu}_{x\nu} V^{\nu} = 0 .$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} V^t_{,x} &= -e^{2t} V^x && (1) \\ V^x_{,x} &= -V^t && (2) \\ V^y_{,x} &= && (3) \\ V^z_{,x} &= 0 && (4) \end{aligned}$$

con le condizioni iniziali, in $x = 0$,

$$V^t(0) = 0\,, \quad V^x(0) = 1\,, \quad V^y(0) = 0\,, \quad V^z(0) = 0\,.$$

Le equazioni per $V^y$ e $V^z$ ci dicono che sono costanti, e quindi uguali ai loro valori iniziali, pari a 0. Dalle equazioni per $V^t$ e $V^x$ si ha, differenziando la (2) e sostituendovi la (1),

$$V^x_{,xx} = e^{2t} V^x$$

che ha soluzione generale

$$V^x(x) = A\cosh(e^t x) + B\sinh(e^t x)\,;$$

dalla (2) si ha

$$V^t(x) = -V^x_{,x} = -e^t A\sinh(e^t x) - e^t B\cosh(e^t x)\,.$$

Le costanti sono fissate dalle condizioni iniziali, in $x = 0$:

$$\begin{aligned} V^x(0) &= A = 1 \\ V^t(0) &= -e^t B = 0 \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} V^x(x) &= \cosh(e^t x) \\ V^t(x) &= -e^t \sinh(e^t x) \end{aligned}$$

e in $Q$, dove $x = 1$,

$$V^\mu = (-e^t \sinh(e^t), \cosh(e^t), 0, 0)\,.$$