PROVA SCRITTA PER IL CORSO DI INTRODUZIONE ALLA RELATIVITÀ GENERALE 10-1-05

PARTE I

Sia dato l'elemento di linea, nel riferimento M di coordinate $x^\mu = (t, x, y, r)$,

$$ds^2 = \frac{1}{4} r^2 [-dt^2 + dx^2 + dy^2] + \frac{dr^2}{4r^2}\,.$$

I simboli di Christoffel non nulli, tranne quelli contenenti l'indice $'t'$, sono:

$$\begin{array}{ll}
\Gamma^r_{xx} = -r^3, & \Gamma^x_{rx} = \Gamma^x_{xr} = \dfrac{1}{r} \\
\Gamma^r_{yy} = -r^3, & \Gamma^y_{ry} = \Gamma^y_{yr} = \dfrac{1}{r} \\
\Gamma^r_{rr} = -\frac{1}{r} & .
\end{array}$$

1. Calcolare i seguenti simboli di Christoffel:

$$\Gamma^r_{tt},\ \Gamma^t_{rt},\ \Gamma^t_{xx}.$$

2. Dato il vettore $\vec{U}$ le cui componenti nel riferimento M sono

$$U^\mu = (r, y, -x, 1)\,,$$

   calcolarne le quadridivergenza $U^\mu_{\ ;\mu}$.

3. Consideriamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{array}{rcl}
t &=& t' \\
x &=& x' \\
y &=& y' \\
r &=& 2r'^2
\end{array}$$

   che porta dal riferimento M al riferimento M'. Determinare il tensore metrico nel riferimento M'.

4. Dato il tensore T, le cui componenti nel riferimento M sono

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2r} \end{pmatrix}\,,$$

   determinare le sue componenti $T_{\alpha'\beta'}$ nel riferimento M'.

5. Determinare $U^{\alpha'}_{\ ;\alpha'}$, ricordando che è uno scalare.

PARTE II

Sia data la metrica di Schwarzschild nelle coordinate $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{array}{lll} \Gamma^r_{rr} = -\frac{M}{r(r-2M)} & \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r} & \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^t_{rt} = \Gamma^t_{tr} = \frac{M}{r(r-2M)} & \Gamma^r_{\theta\theta} = -r + 2M & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta \\ \Gamma^r_{\phi\phi} = -(r-2M)\sin^2\theta & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^r_{tt} = \frac{r-2M}{r^3} M \,. \end{array} \tag{1}$$

Consideriamo il cammino $\mathcal{C}$, da

$$A = (0, r_0, \frac{\pi}{2}, 0)$$

a

$$B = (0, 2r_0, \frac{\pi}{2}, 0)$$

con $t \equiv 0$, $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$, $\phi \equiv 0$. Consideriamo il vettore $\vec{V}$ definito in A di componenti

$$\vec{V} = (V^t, V^r, V^\theta, V^\phi) = (0, 0, 1, 0) \,.$$

Trasportare parallelamente $\vec{V}$ lungo $\mathcal{C}$, e determinare le sue componenti in B.

DOMANDE TEORICHE

1) DISCUTERE LE EQUAZIONI DELLE GEODETICHE NEL LIMITE DI CAMPO DEBOLE E MOSTRARE QUALI INDICAZIONI DANNO SULLA FORMA CHE DEVONO AVERE LE EQUAZIONI DI EINSTEIN.

2) RICAVARE IL TENSORE DI RIEMANN

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}.$$

CALCOLANDO COME VARIA UN VETTORE QUANDO LO SI TRASPORTA PARALLELAMENTE LUNGO UN CAMMINO CHIUSO

3) DATE LE EQUAZIONI DI EINSTEIN PER UNO SPAZIOTEMPO STATICO E A SIMMETRIA SFERICA

$$\begin{array}{ll} a) & G_{00} = \dfrac{1}{r^2} e^{2\nu} \dfrac{d}{dr}\left[r(1 - e^{-2\mu_2})\right] \\ b) & G_{rr} = -\dfrac{1}{r^2} e^{2\mu_2}\left[(1 - e^{-2\mu_2})\right] + \dfrac{2}{r}\nu_{,r} \\ c) & G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\mu_2}\left[\nu_{,rr} + \nu_{,r}^2 + \dfrac{\nu_{,r}}{r} - \nu_{,r}\mu_{2,r} - \dfrac{\mu_{2,r}}{r}\right] \\ d) & G_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta} \end{array}$$

RICAVARE LA SOLUZIONE DI BUCO NERO DI SCHWARZSCHILD E DISCUTERE LA NATURA DELLE SINGOLARITA'

****

Si risponda alla domanda **1)** e, a scelta, o alla **2)** o alla **3)**.

PUNTEGGI

Si assegneranno **8** punti all'esercizio sul trasporto parallelo, **11** punti alla domanda 1) e **11** punti alla domanda scelta tra 2) e 3). Chi risponde a domande aggiuntive guadagna dei + di cui si terra' conto nella valutazione finale.

Chi fa solo una parte del compito, relativa all'esonero mancante o andato male, deve dichiararlo SUBITO, al momento del controllo dei documenti.

Chi fa solo una parte del compito deve uscire dopo due ore, pena l'annullamento.

Il compito annulla gli esoneri precedenti.

SOLUZIONE PARTE I

1. Il tensore metrico è

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4r^2} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

il tensore metrico con indici contravarianti è

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4r^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

I simboli di Christoffel richiesti sono

$$\begin{array}{ll} \Gamma^r_{tt} = r^3, & \Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \dfrac{1}{r} \\ \Gamma^t_{xx} = 0 & . \end{array}$$

2. La quadridivergenza di $\vec{U}$ è
$U^\mu{}_{;\mu} = U^t{}_{;t} + U^x{}_{;x} + U^y{}_{;y} + U^r{}_{;r}$; essendo

$$\begin{aligned} U^t{}_{;t} &= U^t{}_{,t} + \Gamma^t_{tr} U^r = \frac{1}{r} \\ U^x{}_{;x} &= U^x{}_{,x} + \Gamma^x_{xr} U^r = \frac{1}{r} \\ U^y{}_{;y} &= U^y{}_{,y} + \Gamma^y_{yr} U^r = \frac{1}{r} \\ U^r{}_{;r} &= U^r{}_{,r} + \Gamma^r_{rr} U^r = -\frac{1}{r} \end{aligned}$$

sommando si ottiene

$$U^\mu{}_{;\mu} = \frac{2}{r}\,.$$

3. Si ha

$$\begin{array}{ll} dt = dt' & dx = dx' \\ dy = dy' & dr = 4r'dr' \end{array}$$

e

$$r^2 = 4r'^4$$

quindi

$$\frac{dr^2}{4r^2} = \frac{dr'^2}{r'^2}$$

per cui la metrica nel riferimento M' é

$$ds^2 = r'^4(-dt'^2 + dx'^2 + dt'^2) + \frac{dr'^2}{r'^2}\,.$$

4. La matrice di cambiamento di coordinate è

$$\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\right) = \mathrm{diag}(1,1,1,4r')\,.$$

Le componenti di T nel riferimento M' sono

$$T_{\alpha'\beta'}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}T_{\mu\nu}(x(x')) = \Lambda^{T}_{\alpha'}{}^{\mu}T_{\mu\nu}(x(x'))\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}$$

per cui definendo le matrici $T = (T_{\mu\nu})$ e $T' = (T_{\alpha'\beta'})$ possiamo scrivere

$$T' = \Lambda^T T \Lambda$$

e quindi

$$\begin{aligned} T_{\alpha'\beta'} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4r'^2} \end{pmatrix} \Lambda \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Essendo la quadridivergenza uno scalare, la quadridivergenza di $\vec{U}$ nel riferimento M' è uguale a quella nel riferimento M, ma espressa nelle coordinate $x^{\alpha'}$:

$$U^{\alpha'}{}_{;\alpha'} = \frac{2}{r(r')} = \frac{1}{r'^2}\,.$$

SOLUZIONE PARTE II

Il percorso $\mathcal{C}$ è una linea coordinata r, quindi le equazioni del trasporto parallelo di $\vec{V}$ su di esso sono

$$V^{\mu}_{\ ;r} = 0$$

ovvero $V^{\mu}_{\ ,r} = -\Gamma^{\mu}_{r\nu} V^{\nu}$; in questo caso,

$$V^{t}_{\ ,r} = -\tfrac{M}{r(r-2M)} V^{t} \qquad V^{r}_{\ ,r} = \frac{M}{r(r-2M)} V^{r}$$

$$V^{\theta}_{\ ,r} = -\tfrac{1}{r} V^{\theta} \qquad V^{\phi}_{\ ,r} = -\frac{1}{r} V^{\phi} \, .$$

L'equazione per V^t è del tipo

$$V^{t}_{\ ,r} = f(r) V^{t}$$
$$V^{t}(r_0) = 0$$

ed ha quindi come soluzione

$$V^t \equiv 0 \, .$$

Con lo stesso procedimento si dimostra che

$$V^r \equiv V^{\phi} \equiv 0 \, .$$

L'equazione per V^{θ} è

$$V^{\theta}_{\ ,r} = -\frac{1}{r} V^{\theta}$$
$$V^{\theta}(r_0) = 1 \, ,$$

risolvendola con il metodo della separazione delle variabili

$$\int_1^{V^{\theta}(r)} \frac{dV^{\theta}}{V^{\theta}} = -\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'} \quad \Longrightarrow \quad \ln V^{\theta}(r) = -\ln \frac{r}{r_0} \quad \Longrightarrow \quad V^{\theta}(r) = \frac{r_0}{r}$$

e quindi in B, dove $r = 2r_0$, $V^{\theta} = \frac{1}{2}$ e

$$V^{\mu} = (0, 0, \frac{1}{2}, 0) \, .$$