Compito scritto del 16/02/2011

16/02/2011

Nel sistema di riferimento $\mathcal{O}$ di coordinate $\{x^\mu\} = \{u, v, \theta, \phi\}$ sia data la seguente metrica:

$$ds^2 = 2\left(\frac{K}{u^2} - 1\right) du dv + v^2 d\theta^2 + v^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

con K costante. I simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\Gamma^u_{uu} = \frac{2K}{u(u^2-K)}, \qquad \Gamma^u_{\theta\theta} = \frac{u^2 v}{u^2-K}, \qquad \Gamma^u_{\phi\phi} \neq 0,$$
$$\Gamma^\theta_{v\theta} = \frac{1}{v}, \qquad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma^\phi_{v\phi} = \frac{1}{v}, \qquad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Svolgere i seguenti esercizi:

1. Calcolare il simbolo di Christoffel $\Gamma^u_{\phi\phi}$.
2. Dato il vettore $\vec{W}$ di componenti
$$W^\mu = \big(0, u, v^2, 0\big)$$
rispetto a $\mathcal{O}$, calcolare le componenti $W^\theta{}_{;\mu}$ della derivata covariante.
3. Dato il tensore T di componenti
$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u\sin\theta & v\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix}$$
rispetto a $\mathcal{O}$, calcolare le componenti $T^\alpha{}_\beta$ ottenute alzando il primo indice.
4. Calcolare la componente $T_{uu;u}$ della derivata covariante del tensore T.
5. Sia data la seguente trasformazione dalle coordinate $\{x^\mu\} = \{u, v, \theta, \phi\}$ alle coordinate $\{x^{\alpha'}\} = \{t, x, \theta', \phi'\}$:
$$\begin{aligned} u &= t + x^2 \\ v &= t - x^2 \\ \theta' &= \theta \\ \phi' &= \phi \end{aligned}$$
Calcolare le componenti $T_{\alpha'\beta'}$ del tensore T nel nuovo sistema di riferimento (si ricordi di esprimere le componenti del tensore nelle coordinate $\{x^{\alpha'}\}$) .

Soluzioni compito scritto del 16-2-2011

1.
$$\Gamma^u_{\phi\phi} = \frac{u^2 v \sin^2\theta}{u^2 - K}$$

2.
$$W^\theta{}_{;\mu} = (0, 3v, \frac{u}{v}, 0)$$

3. Il tensore metrico in forma controvariante è

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{u^2}{K-u^2} & 0 & 0 \\ \frac{u^2}{K-u^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v^2\sin^2\theta} \end{pmatrix},$$

quindi $T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}$ è

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u^3}{K-u^2} & 0 & \frac{u^2 v}{K-u^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u\sin\theta}{v^2} & \frac{\cos\theta}{v} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u^2}{v^2\sin^2\theta} \end{pmatrix},$$

4.
$$T_{uu;u} = \frac{u^2 - 5K}{u^2 - K}$$

5. Essendo

$$\Lambda = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ 1 & -2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

si ha che

$$\begin{aligned} T_{\alpha'\beta'} = \Lambda^T T \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2x & -2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u\sin\theta & v\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ 1 & -2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2x & -2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & 2ux & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u\sin\theta & v\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & 2ux & v & 0 \\ 2ux & 4ux^2 & 2vx & 0 \\ 0 & 0 & u\sin\theta & v\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t+x^2 & 2x(t+x^2) & (t-x^2) & 0 \\ 2x(t+x^2) & 4x^2(t+x^2) & 2x(t-x^2) & 0 \\ 0 & 0 & (t+x^2)\sin\theta' & (t-x^2)\cos\theta' \\ 0 & 0 & 0 & (t+x^2)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$