Compito scritto del 4/3/2011

Nel sistema di riferimento $\mathcal{O}$ di coordinate $\{x^\mu\} = \{u, v, x, y\}$ sia data la seguente metrica:

$$ds^2 = 2uvdudv + v^2dv^2 + (x^2+y^2)dx^2 + (x^2+y^2)dy^2.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^u_{uu} \neq 0, \qquad \Gamma^v_{vv} = \frac{1}{v},\\
&\Gamma^x_{xx} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \Gamma^x_{xy} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \Gamma^x_{yy} = -\frac{x}{x^2+y^2},\\
&\Gamma^y_{xx} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \Gamma^y_{xy} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \Gamma^y_{yy} = \frac{y}{x^2+y^2},
\end{aligned}$$

Svolgere i seguenti esercizi:

1. Calcolare $g^{\mu\nu}$.
2. Calcolare il simbolo di Christoffel Γ^u_{uu}.
3. Dato il vettore $\vec{W}$ di componenti
$$W^\mu = \big(0, u, x^2, 0\big)$$
rispetto a $\mathcal{O}$, calcolare le componenti $W^\mu{}_{;x}$ della derivata covariante.
4. Dato il tensore T di componenti
$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & vy \\ 0 & 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix}$$
rispetto a $\mathcal{O}$, calcolare le componenti $T^\alpha{}_\beta$ ottenute alzando il primo indice.
5. Calcolare la componente $T_{xv;v}$ della derivata covariante del tensore T.
6. Dato il tensore A di componenti
$$A^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} 2v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2u & 2x & 2y \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
rispetto a $\mathcal{O}$, e data la seguente trasformazione dalle coordinate $\{x^\mu\} = \{u, v, x, y\}$ alle coordinate $\{x^{\alpha'}\} = \{t, z, r, s\}$:
$$\begin{aligned} t &= \frac{u+v}{2} \\ z &= \frac{u-v}{2} \\ r &= x^2 \\ s &= y^2 \end{aligned}$$
definita per $r > 0$ e $s > 0$, calcolare le componenti $A^{\alpha'}{}_{\beta'}$ del tensore A nel nuovo sistema di riferimento.

Soluzioni compito scritto del 4-3-2011

1.
$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/u^2 & 1/uv & 0 & 0 \\ 1/uv & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

2.
$$\Gamma^u_{uu} = \frac{1}{u}$$

3.
$$W^\mu{}_{;x} = (0, 0, \frac{x(3x^2+2y^2)}{x^2+y^2}, -\frac{x^2 y}{x^2+y^2})$$

4. $T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu}$ è
$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1/u & 0 & \dfrac{-v^2+xu}{u^2 v} & 0 \\ 1/v & 0 & 1/u & 0 \\ 0 & \dfrac{u^2}{x^2+y^2} & 0 & \dfrac{vy}{x^2+y^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

5.
$$T_{xv;v} = -\frac{u^2}{v}$$

6. Essendo
$$\Lambda^{-1} = \Lambda^{\mu'}{}_\alpha = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y \end{pmatrix} \tag{1}$$
   e
$$\Lambda = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

si ha che

$$\begin{aligned}
A^{\alpha'}{}_{\beta'} = \Lambda^{-1} T \Lambda \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2u & 2x & 2y \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2y} \end{pmatrix} = \\
&= \quad \begin{pmatrix} v & u & x & y \\ v & -u & -x & -y \\ 0 & 0 & 2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2y} \end{pmatrix} \\
&= \quad \begin{pmatrix} v+u & v-u & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ v-u & v+u & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \quad \begin{pmatrix} 2t & -2z & 1/2 & 1/2 \\ -2z & 2t & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$