SCRITTO 21-2-2008 - Compito A

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento M di coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, dalla metrica

$$ds^2 = -dt^2 + \Phi(t)[dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2]\,,$$

dove Φ è una funzione reale di t.

I simboli di Christoffel non nulli sono (indichiamo con un " $\cdot$ " la derivata rispetto a t):

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_{tr}^{\ r} \neq 0 & \Gamma_{t\theta}^{\ \theta} = \frac{1}{2\Phi}\dot{\Phi} & \Gamma_{t\phi}^{\ \phi} = \frac{1}{2\Phi}\dot{\Phi} \\
\Gamma_{rr}^{\ t} = \frac{1}{2}\dot{\Phi} & \Gamma_{r\theta}^{\ \theta} \neq 0 & \Gamma_{r\phi}^{\ \phi} \neq 0 \\
\Gamma_{\theta\theta}^{\ t} = \frac{1}{2}\dot{\Phi}r^2 & \Gamma_{\theta\theta}^{\ r} = -r & \Gamma_{\theta\phi}^{\ \phi} = \cot\theta \\
\Gamma_{\phi\phi}^{t} \neq 0 & \Gamma_{\phi\phi}^{r} = -r\sin^2\theta & \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta\cos\theta\,.
\end{array}$$

I Parte

1. Calcolare $\Gamma^{\theta}_{r\theta}$ e $\Gamma^{t}_{\phi\phi}$.

2. Dato il tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ T, di componenti nel riferimento M

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

   calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ad esso associato, $T^{\mu}_{\ \nu}$.

3. Calcolare $\quad T^{rt}{}_{;\theta} \quad ; \quad T^{\phi r}{}_{;\phi}$.

4. Sia dato il riferimento M', di coordinate $\{x^{\alpha\prime}\} = (t', x', y', z')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\alpha\prime} = x^{\alpha\prime}(x^{\mu})$

$$\begin{array}{rcl} t' & = & t \\ x' & = & r \sin\theta \cos\phi \\ y' & = & r \sin\theta \sin\phi \\ z' & = & r \cos\theta \end{array}$$

   Sia dato il tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ W, di componenti nel riferimento M

$$W^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

   Calcolare le componenti del tensore W nel riferimento M'.

II Parte

1. Sia
$$\Phi(t) = t^2\,.$$
Sia dato il cammino $\mathcal{C}$ dal punto $P = (2, 1, 0, 0)$ al punto $Q = (3, 1, 0, 0)$, definito da
$$2 < t < 3\,, \qquad r \equiv 1\,, \qquad \theta \equiv 0\,, \qquad \phi \equiv 0\,.$$
Sia dato il vettore $V^\mu = (0, 0, 5, 0)$ in P. Si trasporti parallelamente $\vec{V}$ in Q lungo il cammino $\mathcal{C}$.

2. Discutere l'equazione delle geodetiche nel limite newtoniano.

3. Dimostrare che in Relatività Speciale il tensore energia-impulso per un sistema di particelle soddisfa la legge di conservazione $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$.

SCRITTO 21-2-2008 - Compito B

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento M di coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, dalla metrica

$$ds^2 = -dt^2 + \Phi(t)[dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2]\,,$$

dove Φ è una funzione reale di t.

I simboli di Christoffel non nulli sono (indichiamo con un " $\cdot$ " la derivata rispetto a t):

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_{tr}^{\ \ r} \neq 0 & \Gamma_{t\theta}^{\ \ \theta} = \frac{1}{2\Phi}\dot{\Phi} & \Gamma_{t\phi}^{\ \ \phi} = \frac{1}{2\Phi}\dot{\Phi} \\[2ex]
\Gamma_{rr}^{\ \ t} = \frac{1}{2}\dot{\Phi} & \Gamma_{r\theta}^{\ \ \theta} \neq 0 & \Gamma_{r\phi}^{\ \ \phi} \neq 0 \\[2ex]
\Gamma_{\theta\theta}^{\ \ t} = \frac{1}{2}\dot{\Phi}r^2 & \Gamma_{\theta\theta}^{\ \ r} = -r & \Gamma_{\theta\phi}^{\ \ \phi} = \cot\theta \\[2ex]
\Gamma^t_{\phi\phi} \neq 0 & \Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta\,.
\end{array}$$

I Parte

1. Calcolare $\Gamma^{\ \phi}_{r\phi}$ e $\Gamma^{\ r}_{tr}$.
2. Dato il tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ T, di componenti nel riferimento M

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ad esso associato, $T_{\mu}^{\ \nu}$.
3. Calcolare $\quad T^{\phi r}{}_{;\theta} \quad ; \quad T^{rt}{}_{;r}$.
4. Sia dato il riferimento M', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', z')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^{\mu})$

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= r\sin\theta\cos\phi \\ y' &= r\sin\theta\sin\phi \\ z' &= r\cos\theta \end{aligned}$$

   Sia dato il tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ W, di componenti nel riferimento M

$$W^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calcolare le componenti del tensore W nel riferimento M'.

II Parte

1. Sia
$$\Phi(t) = t^2\,.$$
Sia dato il cammino $\mathcal{C}$ dal punto $P = (1, 2, 0, 0)$ al punto $Q = (4, 2, 0, 0)$, definito da
$$1 < t < 4\,, \qquad r \equiv 2\,, \qquad \theta \equiv 0\,, \qquad \phi \equiv 0\,.$$
Sia dato il vettore $V^\mu = (0, 0, 0, 7)$ in P. Si trasporti parallelamente $\vec{V}$ in Q lungo il cammino $\mathcal{C}$.

2. Ricavare le equazioni di Einstein sapendo che, nel limite newtoniano, le equazioni delle geodetiche mostrano che
$$g_{00} = -\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right)$$
dove Φ è il potenziale newtoniano soluzione dell'equazione di Laplace
$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho\,.$$

3. Dimostrare che il tensore di Riemann dà il commutatore delle derivate covarianti.

ATTENZIONE

- Chi, nell'anno accademico 2007-2008, ha superato il primo esonero svolgerà solo la seconda parte del compito.
- Chi, nell'anno accademico 2007-2008, ha superato il secondo esonero svolgerà solo la prima parte.
- Chi non ha fatto gli esoneri svolgerà entrambe le parti.
- Chi fa solo una parte del compito, relativa all'esonero mancante o andato male, deve dichiararlo SUBITO, al momento del controllo dei documenti, e scriverlo sul frontespizio del compito.
- Chi fa solo una parte del compito deve uscire dopo due ore, pena l'annullamento.
- Il compito annulla gli esoneri precedenti.
- Gli esoneri ottenuti nell'anno accademico 2007-2008 valgono solo fino a settembre 2008.

Soluzione compito A

I Parte

La metrica è

$$\mathrm{diag}(-1, \Phi, \Phi r^2, \Phi r^2 \sin^2\theta)$$

e la metrica inversa è

$$\mathrm{diag}(-1, \Phi^{-1}, \Phi^{-1} r^{-2}, \Phi^{-1} r^{-2} \sin^{-2}\theta)\,.$$

1.

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\theta}_{r\theta} &= \frac{1}{2} g^{\theta\alpha}(g_{r\alpha,\theta} + g_{\theta\alpha,r} - g_{r\theta,\alpha}) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} g_{\theta\theta,r} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^{t}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{t\alpha}(2g_{\phi\alpha,\phi} - g_{\phi\phi,\alpha}) = -\frac{1}{2} g^{tt} g_{\phi\phi,t} = \frac{1}{2}\dot{\Phi} r^2 \sin^2\theta\,.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
T^{\mu}_{\ \nu} &= T^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi r^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
T^{rt}{}_{;\theta} &= T^{rt}{}_{,\theta} + \Gamma^{r}_{\alpha\theta} T^{\alpha t} + \Gamma^{t}_{\alpha\theta} T^{r\alpha} = \Gamma^{t}_{\theta\theta} T^{r\theta} = \frac{1}{2}\dot{\Phi} r^4 \\
T^{\phi r}{}_{;\phi} &= T^{\phi r}{}_{,\phi} + \Gamma^{\phi}_{\alpha\phi} T^{\alpha r} + \Gamma^{r}_{\alpha\phi} T^{\phi\alpha} = \Gamma^{r}_{\phi\phi} T^{\phi\phi} = -r\sin^2\theta\,.
\end{aligned}$$

4. Definiamo la matrice

$$\Lambda = \left(\Lambda^{\alpha\prime}_{\ \ \mu}\right) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Le componenti di W nel frame M' sono

$$W^{\alpha\prime\beta\prime} = \Lambda^{\alpha\prime}_{\ \ \mu} W^{\mu\nu} \Lambda^{\beta\prime}_{\ \ \nu}\,.$$

In forma matriciale,

$$\begin{aligned}
&(W^{\alpha\prime\beta\prime}) = \Lambda W \Lambda^{T} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$
\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ 0 & r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta\sin^2\phi & -r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi & 0 \\ 0 & -r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi & r^2\sin^2\theta\cos^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (y')^2 & -x'y' & 0 \\ 0 & -x'y' & (x')^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
$$

II Parte

Il cammino è una linea coordinata t; l'equazione del trasporto parallelo si riduce quindi, in una parametrizzazione opportuna, a $V^{\mu}_{;t} = 0$, ovvero

$$
\begin{aligned}
V^t_{,t} &= -\Gamma^t_{t\alpha} V^\alpha = 0 \\
V^r_{,t} &= -\Gamma^r_{t\alpha} V^\alpha = -\Gamma^r_{tr} V^r \\
V^\theta_{,t} &= -\Gamma^\theta_{t\alpha} V^\alpha = -\Gamma^\theta_{t\theta} V^\theta \\
V^\phi_{,t} &= -\Gamma^\phi_{t\alpha} V^\alpha = -\Gamma^\phi_{t\phi} V^\phi .
\end{aligned}
$$

L'equazione per V^t ha come soluzione V^t costante, ed essendo $V^t(2) = 0$, si ha $V^t(t) \equiv 0$. La componente r è data dal problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
V^r_{,t} &= -\Gamma^r_{tr} V^r \\
V^r(2) &= 0
\end{aligned}
$$

che ha come unica soluzione $V^r(t) \equiv 0$. La componente ϕ è data dal problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
V^\phi_{,t} &= -\Gamma^\phi_{t\phi} V^\phi \\
V^\phi(2) &= 0
\end{aligned}
$$

che ha come unica soluzione $V^\phi(t) \equiv 0$. La componente θ è data dal problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
V^\theta_{,t} &= -\Gamma^\theta_{t\theta} V^\theta = -\frac{\dot{\Phi}}{2\Phi} V^\theta = -\frac{1}{t} V^\theta \\
V^\theta(2) &= 5
\end{aligned}
$$

che si risolve per separazione di variabili:

$$
\frac{dV^\theta}{V^\theta} = -\frac{dt}{t}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_5^{V^\theta} \frac{dV'^\theta}{V'^\theta} &= -\int_2^t \frac{dt'}{t'} \\
\ln \frac{V^\theta(t)}{5} &= \ln \frac{2}{t} \\
V^\theta(t) &= \frac{10}{t}
\end{aligned}
$$

quindi in Q

$$V^\theta(3) = \frac{10}{3} \, .$$

Soluzione compito B

I Parte

La metrica è
$$\mathrm{diag}(-1, \Phi, \Phi r^2, \Phi r^2 \sin^2\theta)$$
e la metrica inversa è
$$\mathrm{diag}(-1, \Phi^{-1}, \Phi^{-1} r^{-2}, \Phi^{-1} r^{-2} \sin^{-2}\theta)\,.$$

1.

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\phi}_{r\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\alpha}(g_{r\alpha,\phi} + g_{\phi\alpha,r} - g_{r\phi,\alpha}) = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,r} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^{r}_{tr} &= \frac{1}{2} g^{r\alpha}(g_{t\alpha,r} + g_{r\alpha,t} - g_{tr,\alpha}) = \frac{1}{2} g^{rr} g_{rr,t} = \frac{1}{2\Phi}\dot{\Phi}\,.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
T_{\mu}{}^{\nu} &= g_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi r^3 \sin^2\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
T^{rt}{}_{;r} &= T^{rt}{}_{,r} + \Gamma^{r}_{\alpha r} T^{\alpha t} + \Gamma^{t}_{\alpha r} T^{r\alpha} = \Gamma^{t}_{rr} T^{rr} = -\frac{1}{2}\dot{\Phi} \\
T^{\phi r}{}_{;\theta} &= T^{\phi r}{}_{,\theta} + \Gamma^{\phi}_{\alpha\theta} T^{\alpha r} + \Gamma^{r}_{\alpha\theta} T^{\phi\alpha} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} T^{\phi r} = r \cot\theta\,.
\end{aligned}$$

4. Definiamo la matrice

$$\Lambda = \left(\Lambda^{\alpha\prime}{}_{\mu}\right) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Le componenti di W nel frame M' sono
$$W^{\alpha\prime\beta\prime} = \Lambda^{\alpha\prime}_{\mu} W^{\mu\nu} \Lambda^{\beta\prime}_{\nu}\,.$$

In forma matriciale,

$$\begin{aligned}
&(W^{\alpha\prime\beta\prime}) = \Lambda W \Lambda^{T} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$
\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ 0 & r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta\sin^2\phi & -r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi & 0 \\ 0 & -r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi & r^2\sin^2\theta\cos^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (y')^2 & -x'y' & 0 \\ 0 & -x'y' & (x')^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
$$

II Parte

Il cammino è una linea coordinata t; l'equazione del trasporto parallelo si riduce quindi, in una parametrizzazione opportuna, a $V^{\mu}_{;t} = 0$, ovvero

$$
\begin{aligned}
V^t_{,t} &= -\Gamma^t_{t\alpha} V^\alpha = 0 \\
V^r_{,t} &= -\Gamma^r_{t\alpha} V^\alpha = -\Gamma^r_{tr} V^r \\
V^\theta_{,t} &= -\Gamma^\theta_{t\alpha} V^\alpha = -\Gamma^\theta_{t\theta} V^\theta \\
V^\phi_{,t} &= -\Gamma^\phi_{t\alpha} V^\alpha = -\Gamma^\phi_{t\phi} V^\phi .
\end{aligned}
$$

L'equazione per V^t ha come soluzione V^t costante, ed essendo $V^t(1) = 0$, si ha $V^t(t) \equiv 0$. La componente r è data dal problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
V^r_{,t} &= -\Gamma^r_{tr} V^r \\
V^r(1) &= 0
\end{aligned}
$$

che ha come unica soluzione $V^r(t) \equiv 0$. La componente θ è data dal problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
V^\theta_{,t} &= -\Gamma^\theta_{t\theta} V^\theta \\
V^\theta(1) &= 0
\end{aligned}
$$

che ha come unica soluzione $V^\theta(t) \equiv 0$. La componente ϕ è data dal problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
V^\phi_{,t} &= -\Gamma^\phi_{t\phi} V^\phi = -\frac{\dot{\Phi}}{2\Phi} V^\phi = -\frac{1}{t} V^\phi \\
V^\phi(1) &= 7
\end{aligned}
$$

che si risolve per separazione di variabili:

$$
\frac{dV^\phi}{V^\phi} = -\frac{dt}{t}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{7}^{V^{\phi}} \frac{dV'^{\phi}}{V'^{\phi}} &= -\int_{1}^{t} \frac{dt'}{t'} \\
\ln \frac{V^{\phi}(t)}{7} &= \ln \frac{1}{t} \\
V^{\phi}(t) &= \frac{7}{t}
\end{aligned}
$$

quindi in Q

$$V^{\phi}(4) = \frac{7}{4}\,.$$