SCRITTO 10-2-2009 - Compito A

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, dalla metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \, ,$$

dove $M > 0$ è una costante reale.

I simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\Gamma^{\;r}_{\theta\theta} \neq 0 \qquad \Gamma^{\;\theta}_{r\theta} \neq 0 \qquad \Gamma^{\;r}_{rr} = -\tfrac{M}{r^2}\left(1 - \tfrac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$\Gamma^{\;r}_{tt} = \tfrac{M}{r^2}\left(1 - \tfrac{2M}{r}\right) \qquad \Gamma^{\;\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^{\;r}_{\phi\phi} = -(r - 2M)\sin^2\theta$$

$$\Gamma^{\;\phi}_{\theta\phi} = \cot\theta \qquad \Gamma^{\;t}_{rt} = \tfrac{M}{r^2}\left(1 - \tfrac{2M}{r}\right)^{-1} \qquad \Gamma^{\;\phi}_{\phi r} = \tfrac{1}{r} \, .$$

I Parte

1. Calcolare $\Gamma^r_{\theta\theta}$

2. Dato il tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ T, di componenti nel riferimento O

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ t & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ad esso associato, $T^{\mu\nu}$.

3. Calcolare $\quad T^t{}_{t;t} \quad ; \quad T^\theta{}_{\phi;\theta}$.

4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (u, v, \theta', \phi')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^\mu = x^\mu(x^{\alpha'})$

$$\begin{aligned} t &= u + v \\ r &= u - v \\ \theta &= \theta' \\ \phi &= \phi' \end{aligned}$$

   Determinare la metrica nel riferimento O'.

5. Calcolare le componenti del tensore T^μ_ν nel riferimento O'.

II Parte

1. Sia dato il cammino $\mathcal{C}$ dal punto $P = (0, 4M, \pi/2, 0)$ al punto $Q = (0, 4M, \pi/2, \pi/\sqrt{2})$, definito da

$$t \equiv 0\,, \qquad r \equiv 4M\,, \qquad \theta \equiv \frac{\pi}{2}\,, \qquad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

   Sia dato il vettore $V^\mu = (1, 1, 0, 0)$ in P. Si trasporti parallelamente $\vec{V}$ in Q lungo il cammino $\mathcal{C}$.

2. Discutere l'equazione delle geodetiche nel limite newtoniano.

3. Data la metrica che descrive uno spaziotempo statico e a simmetria sferica

$$ds^2 = -e^{2\nu}(dx^0)^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

   e date le equazioni di Einstein che deve soddisfare

$$\begin{aligned}
&a) \quad G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\nu}\frac{d}{dr}\left[r(1-e^{-2\lambda})\right] \\
&b) \quad G_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\lambda}\left[(1-e^{-2\lambda})\right] + \frac{2}{r}\nu_{,r} \\
&c) \quad G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\lambda}\left[\nu_{,rr} + \nu_{,r}^2 + \frac{\nu_{,r}}{r} - \nu_{,r}\lambda_{,r} - \frac{\lambda_{,r}}{r}\right] \\
&d) \quad G_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta}
\end{aligned}$$

   ricavare la soluzione di Schwarzschild.

ATTENZIONE

- Chi, nell'anno accademico 2008-2009, ha superato il primo esonero, svolgerà solo la seconda parte del compito.
- Chi, nell'anno accademico 2008-2009, ha superato il secondo esonero, svolgerà solo la prima parte.
- Chi non ha fatto gli esoneri svolgerà entrambe le parti.
- Chi fa solo una parte del compito, relativa all'esonero mancante o andato male, deve dichiararlo SUBITO, al momento del controllo dei documenti, e scriverlo sul frontespizio del compito.
- Chi fa solo una parte del compito deve uscire dopo due ore, pena l'annullamento.
- Il compito annulla gli esoneri precedenti.
- La prova scritta può essere ripetuta al secondo appello.
- Gli esoneri o gli scritti ottenuti nell'anno accademico 2008-2009 valgono solo fino a settembre 2009.

SCRITTO 10-2-2009 - Compito B

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, dalla metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \,,$$

dove $M > 0$ è una costante reale.

I simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\Gamma^{\ r}_{\theta\theta} \neq 0 \qquad \Gamma^{\ \theta}_{r\theta} \neq 0 \qquad \Gamma^{\ r}_{rr} = -\tfrac{M}{r^2}\left(1 - \tfrac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$\Gamma^{\ r}_{tt} = \tfrac{M}{r^2}\left(1 - \tfrac{2M}{r}\right) \qquad \Gamma^{\ \theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^{\ r}_{\phi\phi} = -(r - 2M)\sin^2\theta$$

$$\Gamma^{\ \phi}_{\theta\phi} = \cot\theta \qquad \Gamma^{\ t}_{rt} = \tfrac{M}{r^2}\left(1 - \tfrac{2M}{r}\right)^{-1} \qquad \Gamma^{\ \phi}_{\phi r} = \tfrac{1}{r}\,.$$

I Parte

1. Calcolare $\Gamma^{\theta}_{r\theta}$

2. Dato il tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ T, di componenti nel riferimento O

$$T_{\mu}{}^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ t & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \end{pmatrix},$$

   calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ad esso associato, $T^{\mu\nu}$.

3. Calcolare $\quad T_{\theta}{}^{\phi}{}_{;\theta} \quad ; \quad T_{t}{}^{r}{}_{;t}$.

4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (u, v, \theta', \phi')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\mu} = x^{\mu}(x^{\alpha'})$

$$\begin{array}{rcl} t & = & u - v \\ r & = & u + v \\ \theta & = & \theta' \\ \phi & = & \phi' \end{array}$$

   Determinare la metrica nel riferimento O'.

5. Calcolare le componenti del tensore $T_{\mu}{}^{\nu}$ nel riferimento O'.

II Parte

1. Sia dato il cammino $\mathcal{C}$ dal punto $P = (0, 4M, \pi/2, 0)$ al punto $Q = (8\pi M, 4M, \pi/2, 0)$, definito da

$$0 \leq t \leq 8\pi M\,, \qquad r \equiv 4M\,, \qquad \theta \equiv \frac{\pi}{2}\,, \qquad \phi \equiv 0\,.$$

   Sia dato il vettore $V^\mu = (1, 0, 0, 1)$ in P. Si trasporti parallelamente $\vec{V}$ in Q lungo il cammino $\mathcal{C}$.

2. Mostrare che, note la metrica $g_{\mu\nu}$ e i coefficienti della connessione affine $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ in un punto, è sempre possibile trovare un sistema di coordinate localmente minkowskiane.

3. Mostrare che se una metrica ammette dei vettori di Killing si possono associare quantità conservate al moto geodetico e al tensore energia-impulso.

ATTENZIONE

- Chi, nell'anno accademico 2008-2009, ha superato il primo esonero, svolgerà solo la seconda parte del compito.
- Chi, nell'anno accademico 2008-2009, ha superato il secondo esonero, svolgerà solo la prima parte.
- Chi non ha fatto gli esoneri svolgerà entrambe le parti.
- Chi fa solo una parte del compito, relativa all'esonero mancante o andato male, deve dichiararlo SUBITO, al momento del controllo dei documenti, e scriverlo sul frontespizio del compito.
- Chi fa solo una parte del compito deve uscire dopo due ore, pena l'annullamento.
- Il compito annulla gli esoneri precedenti.
- La prova scritta può essere ripetuta al secondo appello.
- Gli esoneri o gli scritti ottenuti nell'anno accademico 2008-2009 valgono solo fino a settembre 2009.

Soluzione compito A

I Parte

La metrica è

$$\mathrm{diag}\left(-1+\frac{2M}{r},\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1},r^2,r^2\sin^2\theta\right)$$

e la metrica inversa è

$$\mathrm{diag}\left(-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1},1-\frac{2M}{r},r^{-2},r^{-2}\sin^{-2}\theta\right)\,.$$

1.

$$\Gamma^r_{\theta\theta}=\frac{1}{2}g^{r\alpha}(2g_{\theta\alpha,\theta}-g_{\theta\theta,\alpha})=-\frac{1}{2}g^{rr}g_{\theta\theta,r}=-r+2M\,.$$

2.

$$T^{\mu\nu}=(Tg)^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-\frac{r^2}{r-2M} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{rt}{r-2M} & r-2M & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sin\theta}{r^2} & \frac{\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\,.$$

3.

$$\begin{aligned}T^t{}_{t;t} &= T^t{}_{t,t}+\Gamma^t_{t\alpha}T^\alpha{}_t-\Gamma^\alpha_{tt}T^t{}_\alpha=\Gamma^t_{tr}T^r{}_t=\frac{Mt}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\\ T^\theta{}_{\phi;\theta} &= T^\theta{}_{\phi,\theta}+\Gamma^\theta_{\theta\alpha}T^\alpha{}_\phi-\Gamma^\alpha_{\phi\theta}T^\theta{}_\alpha=T^\theta{}_{\phi,\theta}-\Gamma^\phi_{\phi\theta}T^\theta{}_\phi\\ &= -\sin\theta-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}\,.\end{aligned}$$

4. Differenziando la legge di trasformazione delle coordinate,

$$\begin{aligned}dt &= du+dv\\ dr &= du-dv\\ d\theta &= d\theta'\\ d\phi &= d\phi'\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}dt^2 &= du^2+dv^2+2dudv\\ dr^2 &= du^2+dv^2-2dudv\\ d\theta^2 &= d\theta'^2\\ d\phi^2 &= d\phi'^2\end{aligned}$$

e sostituendo nell'elemento di linea si ha

$$\begin{aligned}ds^2 &= \left[-\left(1-\frac{2M}{u-v}\right)+\left(1-\frac{2M}{u-v}\right)^{-1}\right](du^2+dv^2)\\ &\quad -2\left[\left(1-\frac{2M}{u-v}\right)+\left(1-\frac{2M}{u-v}\right)^{-1}\right]dudv\\ &\quad +(u-v)^2(d\theta'^2+\sin^2\theta' d\phi'^2)\,.\end{aligned}$$

5. Definiamo la matrice

$$\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa è

$$\Lambda^{-1} = \left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}\right) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le componenti di T nel frame O' sono

$$T^{\alpha'}{}_{\beta'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}T^{\mu}{}_{\nu}\,.$$

In forma matriciale,

$$\begin{aligned}
T' &= \Lambda^{-1}T\Lambda \\
&= \Lambda^{-1}\begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ t & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & r & 0 & 0 \\ t+r & t-r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2r+t}{2} & \frac{t}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{t}{2} & \frac{2r-t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3u-v}{2} & \frac{u+v}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{u+v}{2} & \frac{u-3v}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta' & \cos\theta' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

II Parte

Il cammino è una linea coordinata ϕ; l'equazione del trasporto parallelo si riduce quindi, in una parametrizzazione opportuna, a $V^{\mu}_{;\phi} = 0$, ovvero

$$\begin{aligned}
V^{t}{}_{,\phi} &= -\Gamma^{t}_{\phi\alpha}V^{\alpha} = 0 \\
V^{r}{}_{,\phi} &= -\Gamma^{r}_{\phi\alpha}V^{\alpha} = -\Gamma^{r}_{\phi\phi}V^{\phi} \\
V^{\theta}{}_{,\phi} &= -\Gamma^{\theta}_{\phi\alpha}V^{\alpha} = -\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}V^{\phi} = 0 \quad (\text{essendo } \theta = \pi/2) \\
V^{\phi}{}_{,\phi} &= -\Gamma^{\phi}_{\phi\alpha}V^{\alpha} = -\Gamma^{\phi}_{r\phi}V^{r} - \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}V^{\theta} = -\Gamma^{\phi}_{r\phi}V^{r} \quad (\text{essendo } \theta = \pi/2)\,.
\end{aligned}$$

Le equazioni per V^t, V^θ hanno come soluzioni V^t costante, V^θ costante, ed essendo $V^t(0) = 1$, $V^\theta(0) = 0$, si ha $V^t(\phi) \equiv 1$, $V^\theta(\phi) \equiv 0$. Le equazioni per V^r, V^ϕ sono date dal problema di

Cauchy

$$
\begin{aligned}
V^r{}_{,\phi} &= 2MV^\phi \\
V^\phi{}_{,\phi} &= -\frac{1}{4M}V^r \\
V^r(0) &= 1 \\
V^\phi(0) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Differenziando la prima, e sostituendo la seconda, si trova

$$V^r{}_{,\phi\phi} = -\frac{1}{2}V^r$$

e dalla prima si ha anche

$$V^\phi = \frac{1}{2M}V^r{}_{,\phi}\,.$$

La soluzione generale dell'equazione per V^r è

$$V^r(\phi) = A\cos\frac{\phi}{\sqrt{2}} + B\sin\frac{\phi}{\sqrt{2}}$$

da cui si calcola la soluzione generale per V^ϕ:

$$V^\phi(\phi) = -\frac{A}{2M\sqrt{2}}\sin\frac{\phi}{\sqrt{2}} + \frac{B}{2M\sqrt{2}}\cos\frac{\phi}{\sqrt{2}}\,.$$

Le costanti A, B si determinano dalle condizioni iniziali: in $\phi = 0$

$$
\begin{aligned}
V^r(0) &= A = 1 \\
V^\phi(0) &= \frac{B}{2M\sqrt{2}} = 0
\end{aligned}
$$

quindi $A = 1$, $B = 0$, e

$$
\begin{aligned}
V^r(\phi) &= \cos\frac{\phi}{\sqrt{2}} \\
V^\phi(\phi) &= -\frac{1}{2M\sqrt{2}}\sin\frac{\phi}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

In Q, dove $\phi = \pi/\sqrt{2}$,

$$V^\mu = \left(1, 0, 0, -\frac{1}{2M\sqrt{2}}\right)\,.$$

Soluzione compito B

I Parte

La metrica è

$$\mathrm{diag}\left(-1+\frac{2M}{r},\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1},r^2,r^2\sin^2\theta\right)$$

e la metrica inversa è

$$\mathrm{diag}\left(-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1},1-\frac{2M}{r},r^{-2},r^{-2}\sin^{-2}\theta\right)\,.$$

1.

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta}=\frac{1}{2}g^{\theta\alpha}(g_{\alpha r,\theta}+g_{\alpha\theta,r}-g_{r\theta,\alpha})=\frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\theta\theta,r}=\frac{1}{r}\,.$$

2.

$$T^{\mu\nu}=(gT)^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{r^2}{r-2M} & 0 & 0\\ \frac{(r-2M)t}{r} & \frac{(r-2M)t}{r} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin\theta}{r^2}\\ 0 & 0 & \frac{\cos\theta}{r^2\sin^2\theta} & 0\end{pmatrix}\,.$$

3.

$$\begin{aligned} T_t{}^r{}_{;t} &= T_t{}^r{}_{,t}+\Gamma^r_{t\alpha}T_t{}^\alpha-\Gamma^\alpha_{tt}T_\alpha{}^r=-\Gamma^r_{tt}T_r{}^r=-\frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)t\\ T_\theta{}^\phi{}_{;\theta} &= T_\theta{}^\phi{}_{,\theta}+\Gamma^\phi_{\theta\alpha}T_\theta{}^\alpha-\Gamma^\alpha_{\theta\theta}T_\alpha{}^\phi=T_\theta{}^\phi{}_{,\theta}+\Gamma^\phi_{\theta\phi}T_\theta{}^\phi=2\cos\theta\,.\end{aligned}$$

4. Differenziando la legge di trasformazione delle coordinate,

$$\begin{aligned} dt &= du-dv\\ dr &= du+dv\\ d\theta &= d\theta'\\ d\phi &= d\phi'\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} dt^2 &= du^2+dv^2-2dudv\\ dr^2 &= du^2+dv^2+2dudv\\ d\theta^2 &= d\theta'^2\\ d\phi^2 &= d\phi'^2\end{aligned}$$

e sostituendo nell'elemento di linea si ha

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left[-\left(1-\frac{2M}{u+v}\right)+\left(1-\frac{2M}{u+v}\right)^{-1}\right](du^2-dv^2)\\ &+2\left[\left(1-\frac{2M}{u+v}\right)+\left(1-\frac{2M}{u+v}\right)^{-1}\right]dudv\\ &+(u-v)^2(d\theta'^2+\sin^2\theta' d\phi'^2)\,.\end{aligned}$$

5. Definiamo la matrice

$$\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice inversa è

$$\Lambda^{-1} = \left(\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}\right) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le componenti di T nel frame O' sono

$$T_{\alpha'}{}^{\beta'} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} \Lambda^{\beta'}{}_{\nu} T_{\mu}{}^{\nu} .$$

In forma matriciale,

$$\begin{aligned} T' &= \Lambda^T T (\Lambda^{-1})^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ t & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} (\Lambda^{-1})^T \\ &= \begin{pmatrix} t & r+t & 0 & 0 \\ t & -r+t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{r+2t}{2} & \frac{r}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-r+2t}{2} & -\frac{r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3u-v}{2} & \frac{u+v}{2} & 0 & 0 \\ \frac{u-3v}{2} & -\frac{u+v}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta' \\ 0 & 0 & \cos\theta' & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

II Parte

Il cammino è una linea coordinata t; l'equazione del trasporto parallelo si riduce quindi, in una parametrizzazione opportuna, a $V^{\mu}_{;t} = 0$, ovvero

$$\begin{aligned} V^t_{,t} &= -\Gamma^t_{t\alpha} V^\alpha = -\Gamma^t_{tr} V^r \\ V^r_{,t} &= -\Gamma^r_{t\alpha} V^\alpha = -\Gamma^r_{tt} V^t \\ V^\theta_{,t} &= -\Gamma^\theta_{t\alpha} V^\alpha = 0 \\ V^\phi_{,t} &= -\Gamma^\phi_{t\alpha} V^\alpha = 0 \, . \end{aligned}$$

Le equazioni per V^θ, V^ϕ hanno come soluzioni V^θ costante, V^ϕ costante, ed essendo $V^\theta(0) = 0$, $V^\phi(0) = 1$, si ha $V^\theta(t) \equiv 0$, $V^\phi(t) \equiv$

1. Le equazioni per V^t, V^r sono date dal problema di Cauchy

$$\begin{aligned} V^t{}_{,t} &= -\frac{1}{8M} V^r \\ V^r{}_{,t} &= -\frac{1}{32M} V^t \\ V^t(0) &= 1 \\ V^r(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Differenziando la prima, e sostituendo la seconda, si trova

$$V^t{}_{,tt} = \frac{1}{256M^2} V^t$$

e dalla prima si ha anche

$$V^r = -8MV^t{}_{,t}\,.$$

La soluzione generale dell'equazione per V^t è

$$V^t(t) = A\cosh\frac{t}{16M} + B\sinh\frac{t}{16M}$$

da cui si calcola la soluzione generale per V^r:

$$V^r(t) = -\frac{1}{2} A\sin\frac{t}{16M} - \frac{1}{2} B\cos\frac{t}{16M}\,.$$

Le costanti A, B si determinano dalle condizioni iniziali: in $t = 0$

$$\begin{aligned} V^t(0) &= A = 1 \\ V^r(0) &= -\frac{1}{2} B = 0 \end{aligned}$$

quindi $A = 1$, $B = 0$, e

$$\begin{aligned} V^t(t) &= \cosh\frac{t}{16M} \\ V^r(t) &= -\frac{1}{2}\sinh\frac{t}{16M}\,. \end{aligned}$$

In Q, dove $t = 8\pi M$,

$$V^\mu = \left(\cosh\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}\sinh\frac{\pi}{2}, 0, 1\right)\,.$$