PROVA SCRITTA PER IL CORSO DI INTRODUZIONE ALLA RELATIVITÀ GENERALE 9-1-06

PARTE I

Sia data la metrica, nel sistema di riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = \{u, v, y, z\}$,

$$ds^2 = -du dv + (1 + h \sin v) dy^2 + (1 - h \sin v) dz^2 \tag{1}$$

dove h è un parametro reale.

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{aligned}
\Gamma^y_{vy} &= \frac{1}{2} \frac{h \cos v}{1 + h \sin v} \\
\Gamma^z_{vz} &= \frac{1}{2} \frac{h \cos v}{-1 + h \sin v} \\
\Gamma^u_{yy} & \\
\Gamma^u_{zz} &= -h \cos v
\end{aligned} \tag{2}$$

(il simbolo Γ^u_{yy} non è nullo ma non è necessario calcolarlo per lo svolgimento dell'esercizio).

Sia data la 1-forma $\tilde{\omega}$, di componenti, nel riferimento O,

$$\omega_\alpha = (0, 0, y, z)\,. \tag{3}$$

1. Calcolare $\omega_{v;y}$.

2. Dato il riferimento O', di coordinate $\{x'^\mu\} = (t, x, r, \phi)$ definite dalla trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned}
u &= t + x \\
v &= t - x \\
y &= r \cos \phi \\
z &= r \sin \phi\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

   esprimere la metrica nel riferimento O'.

3. Determinare le componenti di $\tilde{\omega}$ nel riferimento O', $\omega_{\beta'}$.

PARTE II

Sia data la metrica, nel sistema di riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = \{u, v, y, z\}$,

$$ds^2 = -dudv + (1 + h\sin v)dy^2 + (1 - h\sin v)dz^2 \tag{5}$$

dove h è un parametro reale.

1. Calcolare Γ^u_{yy}.
2. Dati i punti nel riferimento O: $\{u, v, y, z\}$

$$\begin{aligned} A &= (0,0,0,0) \\ B &= \left(0, \frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \end{aligned} \tag{6}$$

   consideriamo il percorso $\mathcal{C}$ da A a B, con $u \equiv 0$, $y \equiv 0$, $z \equiv 0$, $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Consideriamo il vettore $\mathbf{V}$ definito in A, di componenti

$$V = (0,0,1,0)\,. \tag{7}$$

   Trasportarlo parallelamente lungo il percorso $\mathcal{C}$ fino al punto B, e calcolarne le componenti in B, tenendo conto del fatto che i simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{aligned} \Gamma^y_{vy} &= \frac{1}{2}\frac{h\cos v}{1 + h\sin v} \\ \Gamma^z_{vz} &= \frac{1}{2}\frac{h\cos v}{-1 + h\sin v} \\ \Gamma^u_{yy} & \\ \Gamma^u_{zz} &= -h\cos v\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Ricavare le equazioni di Einstein sapendo che, nel limite newtoniano, le equazioni delle geodetiche mostrano che

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \tag{9}$$

dove Φ è il potenziale newtoniano soluzione dell'equazione di Laplace

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho\,. \tag{10}$$

ATTENZIONE

- Chi ha superato il primo esonero svolgerà solo la seconda parte del compito.
- Chi ha superato il secondo esonero svolgerà solo la prima parte.
- Chi non ha fatto gli esoneri svolgerà entrambe le parti.
- Chi fa solo una parte del compito, relativa all'esonero mancante o andato male, deve dichiararlo SUBITO, al momento del controllo dei documenti.
- Chi fa solo una parte del compito deve uscire dopo due ore, pena l'annullamento.
- Il compito annulla gli esoneri precedenti.

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

PARTE I

1.

$$\omega_{v;y} = \omega_{v,y} - \Gamma^{\nu}_{vy}\omega_{\nu} = -\Gamma^{y}_{vy}\omega_{y} = \frac{1}{2}\frac{hy\cos v}{1+h\sin v}\,. \tag{11}$$

2. Si ha

$$\begin{aligned} du &= dt + dx \\ dv &= dt - dx \\ dy &= \cos\phi dr - r\sin\phi d\phi \\ dz &= \sin\phi dr + r\cos\phi d\phi \end{aligned} \tag{12}$$

quindi

$$-dudv = -dt^2 + dx^2 \tag{13}$$

e

$$\begin{aligned} dy^2 &= \cos^2\phi dr^2 + r^2\sin^2\phi d\phi^2 - 2\sin\phi\cos\phi r dr d\phi \\ dz^2 &= \sin^2\phi dr^2 + r^2\cos^2\phi d\phi^2 + 2\sin\phi\cos\phi r dr d\phi \end{aligned} \tag{14}$$

per cui

$$\begin{aligned} dy^2 + dz^2 &= dr^2 + r^2 d\phi^2 \\ dy^2 - dz^2 &= (dr^2 - r^2 d\phi^2)\cos 2\phi - 2r dr d\phi \sin 2\phi \end{aligned} \tag{15}$$

e la metrica è

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + h\sin(t-x)\left[(dr^2 - r^2 d\phi^2)\cos 2\phi - 2r dr d\phi\sin 2\phi\right]\,. \tag{16}$$

3. La matrice di cambiamento di coordinate da O a O' ${\Lambda^{\mu}}_{\alpha'}$ è quindi

$$\begin{aligned} {\Lambda^{\mu}}_{\alpha'} &= \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -r\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha'}(x') &= \omega_{\mu}(x(x')){\Lambda^{\mu}}_{\alpha'} \\ &= (0,0,r\cos\phi, r\sin\phi)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -r\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= (0,0,r,0)\,. \end{aligned} \tag{18}$$

PARTE II

1. La metrica è

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h\sin v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h\sin v \end{pmatrix} \tag{19}$$

quindi

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+h\sin v)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-h\sin v)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \Gamma^u_{yy} &= g^{u\mu}\Gamma_{yy\mu} = -2\Gamma_{yyv} \\ \Gamma_{yyv} &= \frac{1}{2}(2g_{vy,y} - g_{yy,v}) = -\frac{1}{2}h\cos v \\ \Gamma^u_{yy} &= h\cos v\,. \end{aligned} \tag{21}$$

2. Il percorso AB è una linea coordinata v, quindi le equazioni del trasporto geodetico su di esso sono

$$V^\mu_{;v} = 0 \tag{22}$$

ovvero

$$V^u_{,v} = 0 \tag{23}$$

$$V^v_{,v} = 0 \tag{24}$$

$$V^y_{,v} = -\frac{1}{2}\frac{h\cos v}{1+h\sin v}V^y \tag{25}$$

$$V^z_{,v} = -\frac{1}{2}\frac{h\cos v}{-1+h\sin v}V^z\,. \tag{26}$$

Essendo, in A, $(V^t, V^r, V^\theta, V^\phi) = (0,0,0,0)$, si ha che:

$$V^u = V^v = 0 \quad \forall v\,, \tag{27}$$

e

$$\begin{aligned} V^y_{,v} &= -\frac{1}{2}\frac{h\cos v}{1+h\sin v}V^y \\ V^z_{,v} &= -\frac{1}{2}\frac{h\cos v}{-1+h\sin v}V^z \\ \int_{V^y(0)}^{V^y}\frac{dV^y}{V^y} &= -\frac{1}{2}\int_0^v \frac{h\cos v'}{1+h\sin v'}dv' \\ \int_{V^z(0)}^{V^z}\frac{dV^z}{V^z} &= -\frac{1}{2}\int_0^v \frac{(-h\cos v')}{1-h\sin v'}dv' \\ \ln\frac{V^y}{V^y(0)} &= -\frac{1}{2}\ln(1+h\sin v) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ln \frac{V^z}{V^z(0)} &= -\frac{1}{2} \ln(1 - h \sin v) \\
V^y &= \frac{V^y(0)}{\sqrt{1 + h \sin v}} \\
V^z &= \frac{V^z(0)}{\sqrt{1 - h \sin v}} \,.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Di conseguenza in B, dove $v = \frac{\pi}{2}$,

$$
V^\mu = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{1+h}}, 0\right) . \tag{29}
$$