SCRITTO 9-7-2009

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, x, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 dx^2 + t^2 dy^2 + t^2 dz^2 \,.$$

Sia dato il tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ T, di componenti nel riferimento O

$$T_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{pmatrix} .$$

I Parte

1. Calcolare i simboli di Christoffel.
2. Calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ associato a T, $T^{\mu\nu}$.
3. Calcolare $\quad T_y{}^t{}_{;t} \quad ; \quad T_t{}^z{}_{;t} \quad ; \quad T_x{}^x{}_{;x}$.
4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', u, v, z')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^\mu = x^\mu(x^{\alpha'})$

$$\begin{aligned} t &= e^{t'} \\ x &= u - v \\ y &= u + v \\ z &= z' \end{aligned}$$

   Calcolare le componenti del tensore $T_{\mu'}{}^{\nu'}$ nel riferimento O'.

II Parte

1. Sia dato il cammino $\mathcal{C}$ dal punto $P = (1, 5, 2, 3)$ al punto $Q = (3, 5, 2, 3)$, definito da

   $$1 \leq t \leq 3\,, \qquad x \equiv 5\,, \qquad y \equiv 2\,, \qquad z \equiv 3\,.$$

   Sia dato il vettore $V^\mu = (0, 1, 2, 0)$ in P. Si trasporti parallelamente $\vec{V}$ in Q lungo il cammino $\mathcal{C}$.

2. Mostrare che, note la metrica $g_{\mu\nu}$ e i coefficienti della connessione affine $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ in un punto, è sempre possibile trovare un sistema di coordinate localmente minkowskiane.

3. Discutere l'equazione delle geodetiche nel limite newtoniano.

ATTENZIONE

- Chi, nell'anno accademico 2008-2009, ha superato il primo esonero, svolgerà solo la seconda parte del compito.
- Chi, nell'anno accademico 2008-2009, ha superato il secondo esonero, svolgerà solo la prima parte.
- Chi non ha fatto gli esoneri svolgerà entrambe le parti.
- Chi fa solo una parte del compito, relativa all'esonero mancante o andato male, deve dichiararlo SUBITO, al momento del controllo dei documenti, e scriverlo sul frontespizio del compito.
- Chi fa solo una parte del compito deve uscire dopo due ore, pena l'annullamento.
- Il compito annulla gli esoneri precedenti.
- Gli esoneri o gli scritti ottenuti nell'anno accademico 2008-2009 valgono solo fino a settembre 2009.

SOLUZIONI

I Parte

La metrica è

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, t^2, t^2, t^2)$$

e la metrica inversa è

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, t^{-2}, t^{-2}, t^{-2})\,.$$

1. Le derivate non nulle delle componenti della metrica sono

$$g_{xx,t} = g_{yy,t} = g_{zz,t} = 2t$$

quindi i simboli di Christoffel non nulli con indici bassi,

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})\,,$$

sono

$$\Gamma_{xxt} = \Gamma_{yyt} = \Gamma_{zzt} = -\Gamma_{xtx} = -\Gamma_{yty} = -\Gamma_{ztz} = -t$$

e i simboli di Christoffel non nulli, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\Gamma_{\mu\nu\beta}$, sono

$$\Gamma^x_{tx} = \Gamma^y_{ty} = \Gamma^z_{tz} = \frac{1}{t}\,, \qquad \Gamma^t_{xx} = \Gamma^t_{yy} = \Gamma^t_{zz} = t\,.$$

2.

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}T_\alpha{}^\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & -y \\ 0 & \frac{x}{t^2} & 0 & 0 \\ \frac{y}{t^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{t^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{aligned} T_y{}^t{}_{;t} &= -\Gamma^y_{ty}T_y{}^t = -\frac{y}{t} \\ T_t{}^z{}_{;t} &= \Gamma^z_{tz}T_t{}^z = \frac{y}{t} \\ T_x{}^x{}_{;x} &= T_x{}^x{}_{,x} = 1\,. \end{aligned}$$

4. La matrice cambiamento di coordinate è

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\right) = \begin{pmatrix} e^{t'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La sua inversa è

$$\Lambda^{-1} = (\Lambda^{\alpha'}{}_\mu) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\right) = \begin{pmatrix} e^{-t'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le componenti del tensore nel nuovo riferimento sono

$$T_{\alpha'}{}^{\beta'} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} T_{\mu}{}^{\nu} \Lambda^{\beta'}_{\nu}$$

ovvero, definendo le matrici $T = (T_{\mu}{}^{\nu})$ e $T' = (T_{\alpha'}{}^{\beta'})$,

$$\begin{aligned}
T' &= \Lambda^T T (\Lambda^{-1})^T \\
&= \begin{pmatrix} e^{t'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & e^{t'}y \\ ye^{-t'} & \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & 0 \\ ye^{-t'} & -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{z}{2} & \frac{z}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-v & 0 & 0 & e^{t'}(u+v) \\ (u+v)e^{-t'} & \frac{u-v}{2} & -\frac{u-v}{2} & 0 \\ (u+v)e^{-t'} & -\frac{u-v}{2} & \frac{u-v}{2} & 0 \\ 0 & \frac{z'}{2} & \frac{z'}{2} & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

II Parte

Il cammino $\mathcal{C}$ è una linea coordinata t, quindi le equazioni del trasporto parallelo possono essere scritte nella forma

$$V^\mu_{\ ;t} = V^\mu_{\ ,t} + \Gamma^\mu_{t\nu} V^\nu = 0\,.$$

La componente t ha equazione differenziale

$$V^t_{\ ,t} = -\Gamma^t_{t\mu} V^\mu = 0$$

ed ha dato iniziale $V^t(t=1) = 0$; l'unica soluzione di questo problema di Cauchy è $V^t \equiv 0$. La componente z ha equazione differenziale

$$V^z_{\ ,t} = -\Gamma^z_{tz} V^z = -\frac{1}{t} V^z$$

ed ha dato iniziale $V^z(t=1) = 0$; l'unica soluzione di questo problema di Cauchy è $V^z \equiv 0$. La componente x ha equazione differenziale

$$V^x_{\ ,t} = -\Gamma^x_{tx} V^x = -\frac{1}{t} V^x$$

ed ha dato iniziale $V^x(t=1) = 1$; questo problema di Cauchy si può risolvere per separazione di variabili:

$$\frac{dV^x}{V^x} = -\frac{dt}{t}$$

quindi

$$\int_1^{V^x} \frac{dV'^x}{V'^x} = -\int_1^3 \frac{dt}{t} \qquad \ln V^x = -\ln 3 \qquad V^x = \frac{1}{3}\,.$$

La componente y ha equazione differenziale

$$V^y_{\ ,t} = -\Gamma^y_{ty} V^y = -\frac{1}{t} V^y$$

ed ha dato iniziale $V^y(t=1) = 2$; analogamente al caso precendente, quindi,

$$\int_2^{V^y} \frac{dV'^y}{V'^y} = -\int_1^3 \frac{dt}{t} \qquad \ln \frac{V^y}{2} = -\ln 3 \qquad V^y = \frac{2}{3}\,.$$

Le componenti del vettore V^μ in Q sono quindi

$$V^\mu = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)\,.$$