Compito scritto del 04/07/2011

Nel sistema di riferimento $\mathcal{O}$ di coordinate $\{t, r, \theta, \phi\}$ sia data la metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \,,$$

con $R > 0$ costante e $0 < r < R$. I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^r_{tt} = -\tfrac{(R^2-r^2)r}{R^4} \qquad \Gamma^t_{tr} \neq 0 \qquad \Gamma^r_{rr} = \tfrac{r}{R^2-r^2}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \tfrac{1}{r} \qquad \Gamma^\phi_{\phi r} = \tfrac{1}{r} \qquad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\tfrac{(R^2-r^2)r}{R^2}$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta \qquad \Gamma^r_{\phi\phi} = -\tfrac{(R^2-r^2)r\sin^2\theta}{R^2} \qquad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \,.$$

1. Calcolare Γ^t_{tr}.
2. Data la 1-forma $\tilde{W}$ di componenti

   $$W_\mu = (0, 1, r^2\cos^2\theta, 0)$$

   nel riferimento $\mathcal{O}$, calcolare le componenti $W_{\theta;\mu}$ della derivata covariante.
3. Dato il tensore T di componenti

   $$T_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin\phi}{\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

   calcolare le componenti $T_{\alpha\beta}$.
4. Calcolare la componente $T_\theta{}^\theta{}_{;\theta}$ della derivata covariante del tensore T.
5. Sia dato il riferimento $\mathcal{O}'$, le cui coordinate $x^{\alpha'} = \{t', \beta, \theta', \phi'\}$ sono date dalla trasformazione di coordinate

   $$\begin{aligned} t &= t' \\ r &= R\sin\beta \\ \theta &= \frac{\phi'}{2} \\ \phi &= 2\theta' \,. \end{aligned}$$

   Calcolare le componenti $T_{\alpha'}{}^{\beta'}$ del tensore T nel riferimento $\mathcal{O}'$ (si ricordi di esprimere le componenti del tensore nelle coordinate $\{x^{\alpha'}\}$).

Soluzioni

La metrica inversa è

$$\operatorname{diag}\left(-\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}, 1-\frac{r^2}{R^2}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,.\right)$$

1.

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}g^{t\alpha}(g_{t\alpha,r}+g_{\alpha r,t}-g_{tr,\alpha}) = \frac{1}{2}g^{tt}g_{tt,r} = -\frac{r}{R^2-r^2}\,.$$

2. $W_{\theta;\mu} = W_{\theta,\mu} - \Gamma^\alpha_{\theta,\mu}W_\alpha$, quindi

$$\begin{aligned}
W_{\theta;t} &= 0\\
W_{\theta;r} &= W_{\theta,r} - \Gamma^\theta_{\theta r}W_\theta = 2r\cos^2\theta - r\cos^2\theta = r\cos^2\theta\\
W_{\theta;\theta} &= W_{\theta,\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta}W_r = -2r^2\sin\theta\cos\theta + \frac{R^2-r^2}{R^2}r\\
W_\phi &= 0\,.
\end{aligned}$$

3.

$$T_{\mu\nu} = T_\mu{}^\alpha g_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 1-\frac{r^2}{R^2} & 0 & r^2\cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin\phi \end{pmatrix}\,.$$

4.

$$T_\theta{}^\theta{}_{;\theta} = T_\theta{}^\theta{}_{,\theta} - \Gamma^\alpha_{\theta\theta}T_\alpha{}^\theta + \Gamma^\theta_{\theta\alpha}T_\theta{}^\alpha = -\Gamma^r_{\theta\theta}T_r{}^\theta = \frac{R^2-r^2}{R^2}r\cos\phi\,.$$

5. La matrice trasformatione di coordinate è

$$\Lambda = (\Lambda_{\alpha\prime}^{\;\mu}) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha\prime}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & R\cos\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e la sua inversa è

$$\Lambda^{-1} = (\Lambda_\mu{}^{\alpha\prime}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^\mu}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{R\cos\beta} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Le componenti del tensore nel nuovo frame sono

$$T_{\alpha\prime}^{\;\beta\prime} = \Lambda_{\alpha\prime}{}^\mu T_\mu{}^\nu \Lambda_\nu{}^{\beta\prime}$$

quindi, indicando $T = (T_\mu{}^\nu)$ e $T' = T_{\alpha'}{}^{\beta'}$, si ha

$$
\begin{aligned}
T' &= \Lambda^T T (\Lambda^T)^{-1} \\
&= \Lambda^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin\phi}{\sin^2\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R\cos\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R\cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2\cos\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin\phi}{2\sin^2\theta} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R\cos\beta & 0 & 0 & 2R\cos\beta\cos\phi \\ 0 & 0 & \frac{\sin\phi}{\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R\cos\beta & 0 & 0 & 2R\cos\beta\cos 2\theta' \\ 0 & 0 & \frac{\sin 2\theta'}{\sin^2 \frac{\phi'}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$