# SCRITTO 8-9-2008

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento $M$ di coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, dalla metrica

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + +r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 - \frac{4J}{r}\sin^2\theta dt d\phi\,,$$

dove $J$ è un parametro reale costante.

I simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\Gamma^{\ t}_{tr} = -\tfrac{2J^2\sin^2\theta}{rA} \quad \Gamma^{\ t}_{t\theta} = \tfrac{4J^2\sin\theta\cos\theta}{A} \quad \Gamma^{\ t}_{r\phi} = -\tfrac{3r^2 J\sin^2\theta}{A}$$

$$\Gamma^{\ r}_{t\phi} \neq 0 \qquad \Gamma^{\ r}_{\theta\theta} \neq 0 \qquad \Gamma^{\ r}_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta$$

$$\Gamma^{\ \theta}_{t\phi} = \tfrac{2J\sin\theta\cos\theta}{r^3} \qquad \Gamma^{\ \theta}_{\theta r} = \tfrac{1}{r} \qquad \Gamma^{\ \theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^{\phi}_{tr} = \tfrac{J}{A} \qquad \Gamma^{\ \phi}_{t\theta} = -\tfrac{2rJ\cot\theta}{A} \qquad \Gamma^{\ \phi}_{r\phi} = \tfrac{r^4 - 2J^2\sin^2\theta}{rA}$$

$$\Gamma^{\ \phi}_{\theta\phi} = -\cot\theta$$

dove abbiamo definito

$$A \equiv r^4 + 4J^2\sin^2\theta\,.$$

## I Parte

1. Calcolare la metrica inversa $g^{\mu\nu}$.
2. Calcolare $\Gamma^{\ r}_{t\phi}$ e $\Gamma^{\ r}_{\theta\theta}$.
3. Dato il tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $T$, di componenti

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix},$$

   calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ad esso associato, $T_{\mu}^{\ \nu}$.
4. Calcolare $\quad T^{\phi r}_{\quad ;t} \quad ; \quad T^{\theta t}_{\quad ;t}$.

## II Parte

1. Sia Sia dato il cammino $\mathcal{C}$ dal punto $P = (0, 1, \frac{\pi}{3}, 0)$ al punto $Q = (0, 2, \frac{\pi}{3}, 0)$, definito da

$$t \equiv 0\,, \qquad 1 \leq r \leq 2\,, \qquad \theta \equiv \frac{\pi}{3}\,, \qquad \phi \equiv 0\,.$$

   Sia dato il vettore $V^\mu = (0, 0, 2, 0)$ in $P$. Calcolare le componenti del vettore $\vec{V}$, trasportato parallelamente lungo il cammino $\mathcal{C}$, nel punto $Q$.

2. Ricavare le equazioni di Einstein sapendo che, nel limite newtoniano, le equazioni delle geodetiche mostrano che

$$g_{00} = -\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right)$$

   dove $\Phi$ è il potenziale newtoniano soluzione dell'equazione di Laplace

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho\,.$$

3. Discutere la natura delle ipersuperfici in Relatività Generale e, data la metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,,$$

   spiegare perchè la superficie $r = 2m$ è un orizzonte degli eventi.

## SOLUZIONI

### I Parte

1. La metrica è
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\frac{2J}{r}\sin^2\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ -\frac{2J}{r}\sin^2\theta & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} .$$
Essa è diagonale a blocchi, quindi
$$g^{rr} = 1\,, \qquad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$$
e
$$\begin{pmatrix} g^{tt} & g^{t\phi} \\ g^{\phi t} & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{Det}\begin{pmatrix} g_{\phi\phi} & -g_{t\phi} \\ -g_{\phi t} & g_{tt} \end{pmatrix} .$$
Essendo
$$Det = -r^2\sin^2\theta - \frac{4J^2}{r^2}\sin^4\theta = -\frac{\sin^2\theta}{r^2}A\,,$$
la metrica inversa è
$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{r^4}{A} & 0 & 0 & -\frac{2Jr}{A} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ -\frac{2Jr}{A} & 0 & 0 & \frac{r^2}{A\sin^2\theta} \end{pmatrix} .$$

2.
$$\begin{aligned} \Gamma^r_{t\phi} &= \frac{1}{2}g^{r\alpha}(g_{t\alpha,\phi} + g_{\alpha\phi,t} - g_{t\phi,\alpha}) = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{t\phi,r} = -\frac{J}{r^2}\sin^2\theta\,, \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}g^{r\alpha}(2g_{\theta\alpha,\theta} - g_{\theta\theta,\alpha}) = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{\theta\theta,r} = -r\,. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
T_\mu{}^\nu &= g_{\mu\alpha}T^{\alpha\nu} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\frac{2J}{r}\sin^2\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ -\frac{2J}{r}\sin^2\theta & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{r} - \frac{2J}{r^3}\sin^2\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\frac{2J}{r}\sin^2\theta & 0 & 0 & \left(-\frac{2J}{r^2}+1\right)\sin^2\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
T^{\phi r}{}_{;t} &= T^{\phi r}_{\ ,t} + \Gamma^\phi_{t\mu}T^{\mu r} + \Gamma^r_{t\mu}T^{\phi\mu} = \Gamma^r_{t\phi}T^{\phi\phi} = -\frac{J\sin^2\theta}{r^4} \\
T^{\theta t}{}_{;t} &= T^{\theta t}{}_{,t} + \Gamma^\theta_{t\mu}T^{\mu t} + \Gamma^t_{t\mu}T^{\theta\mu} = \Gamma^t_{t\theta}T^{\theta\theta} = \frac{8J^2\sin\theta\cos\theta}{Ar^2}.
\end{aligned}$$

## II Parte

Il cammino è una linea coordinata $r$; l'equazione del trasporto parallelo si riduce quindi, in una parametrizzazione opportuna, a $V^{\mu}_{\ ;r} = 0$, ovvero

$$\begin{aligned} V^t_{\ ,r} &= -\Gamma^t_{rt} V^t - \Gamma^t_{r\phi} V^\phi \\ V^r_{\ ,r} &= 0 \\ V^\theta_{\ ,r} &= -\Gamma^\theta_{r\theta} V^\theta \\ V^\phi_{\ ,r} &= -\Gamma^\phi_{rt} V^t - \Gamma^\phi_{r\phi} V^\phi \,. \end{aligned}$$

L'equazione per $V^r$ ha come soluzione $V^r$ costante, ed essendo $V^r(1) = 0$, $V^r \equiv 0$. Le componenti $t, \phi$ si trovano risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} V^t_{\ ,r} &= -\Gamma^t_{rt} V^t - \Gamma^t_{r\phi} V^\phi \\ V^\phi_{\ ,r} &= -\Gamma^\phi_{rt} V^t - \Gamma^\phi_{r\phi} V^\phi \\ V^t(1) &= 0 \\ V^\phi(1) &= 0 \end{aligned}$$

che ha come unica soluzione $V^t(r) = V^\phi(r) \equiv 0$.

La componente $\theta$ si trova risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} V^\theta_{\ ,r} &= -\Gamma^\theta_{r\theta} V^\theta = -\frac{1}{r} V^\theta \\ V^\theta(1) &= 2 \end{aligned}$$

che si risolve per separazione di variabili:

$$\int_2^{V^\theta(2)} \frac{dV^\theta}{V^\theta} = -\int_1^2 \frac{dr}{r} \,,$$

integrando

$$\ln \frac{V^\theta(2)}{2} = -\ln 2$$

ed esponenziando

$$V^\theta(2) = 1$$

quindi in $Q$

$$V^{\mu} = (0, 0, 1, 0)\,.$$