SCRITTO 15-9-2009

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, \chi, \theta, \phi)$, dalla metrica

$$ds^2 = -dt^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

con

$$-\infty < t < +\infty\,, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\,, \qquad 0 < \chi < 2\pi\,, \qquad -\pi < \phi < \pi\,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{array}{lll} \Gamma^\theta_{\chi\theta} = \cot\chi & \Gamma^\phi_{\chi\phi} \neq 0 & \Gamma^\chi_{\theta\theta} = -\sin\chi\cos\chi \\ \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta & \Gamma^\chi_{\phi\phi} \neq 0 & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta\,. \end{array}$$

Sia dato il tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ T, di componenti nel riferimento O

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\chi & 0 \\ 0 & 0 & \cos\chi & 0 \\ \sin\chi & -\cos\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

I Parte

1. Calcolare i simboli di Christoffel $\Gamma^{\phi}_{\chi\phi}$, $\Gamma^{\chi}_{\phi\phi}$.

2. Calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ associato a T, $T_{\mu\nu}$.

3. Calcolare $\quad T^{\theta\chi}{}_{;\chi} \;\; ; \quad T^{t\chi}{}_{;\theta}$.

4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', \chi', \theta', \phi')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\mu} = x^{\mu}(x^{\alpha'})$

$$\begin{array}{rcl} t & = & t' - \sin \chi' \\ \chi & = & \chi' \\ \theta & = & \theta' \\ \phi & = & \phi' \,. \end{array}$$

   Calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

II Parte

1. Sia dato il cammino $\mathcal{C}$ dal punto $P = \left(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{6}, 0\right)$ al punto $Q = \left(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{3}, 0\right)$ definito da

$$t \equiv 1\,, \qquad \chi \equiv \frac{\pi}{4}\,, \qquad \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{3}\,, \qquad \phi \equiv 0\,.$$

   Sia dato il vettore $V^\mu = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ in P. Si trasporti parallelamente $\vec{V}$ in Q lungo il cammino $\mathcal{C}$.

2. Ricavare l'equazione di Killing e mostrare che si può scrivere nella forma

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0.$$

   Mostrare che se lo spaziotempo ammette un campo di vettori di Killing, si possono scegliere le coordinate in modo da sfruttare le simmetrie ad essi associate.

3. Data la metrica che descrive uno spaziotempo statico e a simmetria sferica

$$ds^2 = -e^{2\nu}(dx^0)^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

   e date le equazioni di Einstein che deve soddisfare

$$\begin{aligned}
&a) \quad G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\nu}\frac{d}{dr}\left[r(1-e^{-2\lambda})\right]\\
&b) \quad G_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\lambda}\left[(1-e^{-2\lambda})\right] + \frac{2}{r}\nu_{,r}\\
&c) \quad G_{\theta\theta} = r^2e^{-2\lambda}\left[\nu_{,rr} + \nu_{,r}^2 + \frac{\nu_{,r}}{r} - \nu_{,r}\lambda_{,r} - \frac{\lambda_{,r}}{r}\right]\\
&d) \quad G_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta}
\end{aligned}$$

   ricavare la soluzione di Schwarzschild.

ATTENZIONE

- Chi, nell'anno accademico 2008-2009, ha superato il primo esonero, svolgerà solo la seconda parte del compito.
- Chi, nell'anno accademico 2008-2009, ha superato il secondo esonero, svolgerà solo la prima parte.
- Chi non ha fatto gli esoneri svolgerà entrambe le parti.
- Chi fa solo una parte del compito, relativa all'esonero mancante o andato male, deve dichiararlo SUBITO, al momento del controllo dei documenti, e scriverlo sul frontespizio del compito.
- Chi fa solo una parte del compito deve uscire dopo due ore, pena l'annullamento.
- Il compito annulla gli esoneri precedenti.
- Gli esoneri o gli scritti ottenuti nell'anno accademico 2008-2009 valgono solo fino a settembre 2009.

SOLUZIONI

I Parte

La metrica è

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \sin^2\chi, \sin^2\chi\sin^2\theta)$$

e la metrica inversa è

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \sin^{-2}\chi, \sin^{-2}\chi\sin^{-2}\theta)\,.$$

1. Utilizzando la formula

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$$

si trova

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\phi}_{\chi\phi} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}g_{\phi\phi,\chi} = \cot\chi \\
\Gamma^{\chi}_{\phi\phi} &= -g^{\chi\chi}g_{\phi\phi,\chi} = -\sin\chi\cos\chi\sin^2\theta\,.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2\chi\sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\chi & 0 \\ 0 & 0 & \cos\chi & 0 \\ \sin\chi & -\cos\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2\chi\sin^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin^3\chi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\chi\cos\chi & 0 \\ -\sin^3\chi & -\sin^2\chi\cos\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
T^{\theta\chi}{}_{;\chi} &= T^{\theta\chi}{}_{,\chi} + \Gamma^{\theta}_{\chi\alpha}T^{\alpha\chi} + \Gamma^{\chi}_{\chi\alpha}T^{\theta\alpha} \\
&= \sin\chi + \Gamma^{\theta}_{\chi\theta}T^{\theta\chi} = \frac{\sin^2\chi - \cos^2\chi}{\sin\chi} \\
T^{t\chi}{}_{;\theta} &= T^{t\chi}{}_{,\theta} + \Gamma^{t}_{\theta\alpha}T^{\alpha\chi} + \Gamma^{\chi}_{\theta\alpha}T^{t\alpha} \\
&= \Gamma^{\chi}_{\theta\theta}T^{t\theta} = -\sin^2\chi\cos\chi\,.
\end{aligned}$$

4. La matrice cambiamento di coordinate è

$$\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\chi' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La sua inversa è

$$\Lambda^{-1} = (\Lambda^{\alpha'}_{\ \mu}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\chi' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le componenti del tensore nel nuovo riferimento sono

$$T^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha\prime}_{\ \mu} T^{\mu\nu} \Lambda^{\beta\prime}_{\ \nu}$$

ovvero, definendo le matrici $T = (T^{\mu\nu})$ e $T' = (T^{\alpha\prime\beta\prime})$,

$$\begin{aligned} T' &= \Lambda^{-1} T (\Lambda^{-1})^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cos\chi' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\chi' & 0 \\ 0 & 0 & \cos\chi' & 0 \\ \sin\chi' & -\cos\chi' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\chi' & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cos\chi' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\chi' & 0 \\ 0 & 0 & \cos\chi' & 0 \\ \sin\chi' - \cos^2\chi' & -\cos\chi' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\chi' + \cos^2\chi' & 0 \\ 0 & 0 & \cos\chi' & 0 \\ \sin\chi' - \cos^2\chi' & -\cos\chi' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

II Parte

Il cammino $\mathcal{C}$ è una linea coordinata θ, quindi le equazioni del trasporto parallelo possono essere scritte nella forma

$$V^\mu_{;\theta} = V^\mu_{,\theta} + \Gamma^\mu_{\theta\nu} V^\nu = 0 \,.$$

La componente t ha equazione differenziale

$$V^t_{,\theta} = -\Gamma^t_{\theta\mu} V^\mu \equiv 0$$

ed ha dato iniziale $V^t(\theta = \pi\sqrt{2}/6) = 1$; l'unica soluzione di questo problema di Cauchy è $V^t \equiv 1$. La componente ϕ ha equazione differenziale

$$V^\phi_{,\theta} = -\Gamma^\phi_{\theta\mu} V^\mu = -\cot\theta V^\phi$$

ed ha dato iniziale $V^\phi(\theta = \pi\sqrt{2}/6) = 0$; l'unica soluzione di questo problema di Cauchy è $V^\phi \equiv 0$. Le componenti χ, θ hanno equazione differenziali (essendo $\chi \equiv \pi/4$)

$$\begin{aligned} V^\chi_{,\theta} &= -\Gamma^\chi_{\theta\mu} V^\mu = \frac{1}{2} V^\theta \\ V^\theta_{,\theta} &= -\Gamma^\theta_{\theta\mu} V^\mu = -V^\chi \,, \end{aligned}$$

con dati iniziali, a $\theta = \pi\sqrt{2}/6$, $V^\chi = 2 \,, \qquad V^\theta = 4$.

Differenziando la prima e sostituendo nella seconda si trova $V^\chi_{,\theta\theta} = -\frac{1}{2} V^\chi$ la cui soluzione generale ha la forma

$$V^\chi = A \sin\frac{\theta}{\sqrt{2}} + B \cos\frac{\theta}{\sqrt{2}} \,.$$

La soluzione per V^θ è quindi

$$V^\theta = 2V^\chi_{,\theta} = A\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}} - B\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{\sqrt{2}} \,.$$

A $\theta = \pi\sqrt{2}/6$ si ha

$$\begin{aligned} V^\chi &= \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ V^\theta &= \frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{B}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

quindi $A = 0$, $B = 1$ e, a $\theta = \pi\sqrt{2}/3$,

$$V^\chi = \frac{1}{2} \,, \qquad V^\theta = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

e in Q

$$V^\mu = \left(1, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0 \right) \,.$$