RELATIVITÀ GENERALE - SCRITTO 21-9-2011

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, dalla metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \left(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right)$$

con $M > 0$ costante,

$$-\infty < t < +\infty\,, \quad 2M < r < +\infty \quad , \quad 0 < \theta < \pi\,, \quad 0 < \phi < 2\pi\,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{M}{r(r+2M)} \quad \Gamma^t_{tr} = \frac{M}{r(r-2M)} \quad \Gamma^r_{rr} = -\frac{M}{r(r+2M)}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{r+M}{r(r+2M)} \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{r+M}{r(r+2M)} \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r(r+M)}{r+2M}$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta \qquad \Gamma^r_{\phi\phi} \neq 0 \qquad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta\,.$$

1. Calcolare il simbolo di Christoffel $\Gamma^r_{\phi\phi}$.

2. Dato il tensore T, di componenti nel riferimento O

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sin\theta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \\ \end{pmatrix}.$$

   calcolare le componenti $T_{\alpha\beta}$.

3. Calcolare $\quad T^{t\phi}{}_{;\theta}$ e $\quad T^{rr}{}_{;r}$.

4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', z')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\mu)$

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= r\sin\theta\cos\phi \\ y' &= r\sin\theta\sin\phi \\ z' &= r\cos\theta \end{aligned}$$

   Calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'\nu'}$ nel riferimento O' (non è necessario esprimere le componenti nelle nuove coordinate).

Soluzioni

La metrica inversa è

$$\mathrm{diag}\left(-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1},\left(1+\frac{2M}{r}\right)^{-1},\left(1+\frac{2M}{r}\right)^{-1}r^{-2},\left(1+\frac{2M}{r}\right)^{-1}r^{-2}\sin^{-2}\theta\right)$$

1.

$$\begin{aligned}\Gamma^{r}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}g^{r\alpha}(2g_{\alpha\phi,\phi}-g_{\phi\phi,\alpha}) = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{\phi\phi,r} \\ &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{2M}{r}\right)^{-1}(r^2+2Mr)_{,r}\sin^2\theta = -\frac{r(r+M)}{r+2M}\sin^2\theta\,.\end{aligned}$$

2.

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}T^{\alpha\beta}g_{\beta\nu} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 & 0 & 0 & -(r^2-4M^2)\sin\theta \\ 0 & \left(1+\frac{2M}{r}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r+2M)^2\sin^4\theta \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{aligned}T^{t\phi}{}_{;\theta} &= T^{t\phi}{}_{,\theta} + \Gamma^{t}_{\theta\alpha}T^{\alpha\phi} + \Gamma^{\phi}_{\theta\alpha}T^{t\alpha} \\ &= T^{t\phi}{}_{,\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\phi}T^{t\phi} = -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cot\theta}{\sin\theta} = 0 \\ T^{rr}{}_{;r} &= T^{rr}{}_{,r} + \Gamma^{r}_{r\alpha}(T^{\alpha r}+T^{r\alpha}) = 2\Gamma^{r}_{rr}T^{rr} = -\frac{2M}{r(r+2M)}\,.\end{aligned}$$

4. La matrice trasformatione di coordinate è

$$\Lambda = (\Lambda^{\alpha\prime}_{\ \ \mu}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Le componenti del tensore nel nuovo frame sono

$$T^{\alpha\prime\beta\prime} = \Lambda^{\alpha\prime}_{\ \ \mu}T^{\mu\nu}\Lambda^{\beta\prime}_{\ \ \nu}$$

quindi, indicando $T = (T^{\mu\nu})$ e $T' = T^{\alpha\prime\beta\prime}$, si ha

$$T' = \Lambda T \Lambda^{T}$$

$$
= \quad \Lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sin\theta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ 0 & r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} .
$$

$$
. \begin{pmatrix} 1 & -r\sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r}\sin\theta\sin\phi & \frac{1}{r}\sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & -r\sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & \sin^2\theta & 0 & \sin\theta\cos\theta\cos\phi \\ 0 & 0 & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta\sin\phi \\ & & & \\ 0 & \sin\theta\cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\theta\sin\phi & \cos^2\theta \end{pmatrix} .
$$