PROVA SCRITTA PER IL CORSO DI INTRODUZIONE ALLA RELATIVITÀ GENERALE 12-9-05

PARTE I

Sia data la metrica, nel sistema di riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = \{t, r, \theta, \phi\}$,

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2\theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2\theta) d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2\theta d\phi^2 \, . \tag{1}$$

1. Dimostrare che essa descrive lo spazio-tempo piatto, passando al sistema di coordinate O' $\{x^{\alpha'}\} = \{t, x, y, z\}$ con

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin\theta \cos\phi \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin\theta \sin\phi \\ z &= r^2 \cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

   ed $a > 0$.

2. Dato il vettore $\mathbf{V}$ che, rispetto a O, ha componenti

$$V^\mu = (0, 0, 0, 1) \, , \tag{3}$$

   determinare le sue componenti rispetto a O'.

3. a) Calcolare, nel riferimento O, i simboli di Christoffel

$$\Gamma^\phi_{\phi r}, \, \Gamma^\phi_{\phi\theta} \, . \tag{4}$$

   b) Utilizzando il fatto che, nella metrica considerata,

$$\Gamma^\phi_{\phi t} = \Gamma^\phi_{\phi\phi} = 0 \, , \tag{5}$$

   calcolare

$$V^\phi_{\ ;r} \qquad \text{e} \qquad V^\phi_{\ ;\theta} \, . \tag{6}$$

DATA LA METRICA DI SCHWARZSCHILD

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{7}$$

DERIVARE L'EQUAZIONE DELLE GEODETICHE PER PARTICELLE DI MASSA NULLA E DISCUTERE I VARI TIPI DI ORBITA.

Si assegneranno 6 punti a ognuno degli esercizi, e 12 punti alla domanda teorica.

PARTE II

Sia data la metrica, nel sistema di riferimento O, di coordinate $\{x^\mu\} = \{t, r, \theta, \phi\}$,

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\phi^2 \,. \tag{8}$$

Dati i punti nel riferimento O: $\{t, r, \theta, \phi\}$

$$\begin{aligned} A &= \left(t_0, r_0, \frac{\pi}{2}, 0\right) \\ B &= \left(t_0, r_0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{aligned} \tag{9}$$

consideriamo il percorso $\mathcal{C}$ dato dalla semicirconferenza AB di raggio r_0, con $\theta \equiv \pi/2$ e $\phi \in [0, \pi]$. Consideriamo il vettore $\mathbf{V}$ definito in A, di componenti

$$V = (0, 0, 0, 1) \,. \tag{10}$$

Trasportarlo parallelamente lungo il percorso $\mathcal{C}$ fino al punto B, e calcolarne le componenti in B, tenendo conto del fatto che, nel piano $\theta = \pi/2$, i simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{rr} &= \frac{a^2}{r(r^2 + a^2)} \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^\phi_{r\phi} &= \frac{r}{r^2 + a^2} \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{r^2 + a^2}{r} \\ \Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{r^2 + a^2}{r} \,. \end{aligned} \tag{11}$$

RICAVARE L'EQUAZIONE DI KILLING E DISCUTERNE LE CONSEGUENZE. IN PARTICOLARE, MOSTRARE CHE SE UNA METTRICA AMMETTE DEI VETTORI DI KILLING SI POSSONO ASSOCIARE QUANTITÀ CONSERVATE AL MOTO GEODETICO E AL TENSORE ENERGIA-IMPULSO T^{ab}.

DATA LA METRICA DI SCHWARZSCHILD

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{12}$$

DERIVARE L'EQUAZIONE DELLE GEODETICHE PER PARTICELLE DI MASSA DIVERSA DA ZERO E DISCUTERE I VARI TIPI DI ORBITA.

Si assegneranno 8 punti all'esercizio sul trasporto parallelo, ed 11 punti ad ognuna delle due domande teoriche.

ATTENZIONE

- Chi ha superato il primo esonero svolgera' solo la prima parte del compito

- Chi ha superato il secondo esonero svolgera' solo la seconda parte

- Chi non ha fatto gli esoneri svolgera' entrambe le parti.

Chi fa solo una parte del compito, relativa all'esonero mancante o andato male, deve dichiararlo SUBITO, al momento del controllo dei documenti.

Chi fa solo una parte del compito deve uscire dopo due ore, pena l'annullamento.

Il compito annulla gli esoneri precedenti.

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

PARTE I

1. Differenziando (2),

$$\begin{aligned} dx &= \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\sin\theta\cos\phi dr + \sqrt{r^2+a^2}\cos\theta\cos\phi d\theta - \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\phi d\phi \\ dy &= \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\sin\theta\sin\phi dr + \sqrt{r^2+a^2}\cos\theta\sin\phi d\theta + \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\phi d\phi \\ dz &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{aligned} \tag{13}$$

quindi

$$\begin{aligned} & dx^2+dy^2+dz^2 = \left(\frac{r^2}{r^2+a^2}\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)dr^2 \\ & + \left((r^2+a^2)\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right)d\theta^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta d\phi^2 \\ & = \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2}dr^2 + (r^2+a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta d\phi^2 \end{aligned} \tag{14}$$

e

$$ds^2 = -dt^2+dx^2+dy^2+dz^2\,. \tag{15}$$

2. Dalla (13) si hanno i valori delle derivate

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\,. \tag{16}$$

La matrice di cambiamento di coordinate da O a O' $\Lambda^{\alpha'}_{\ \ \mu}$ è quindi

$$\begin{aligned} & \Lambda^{\alpha'}_{\ \ \mu} = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}\right) \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\sin\theta\cos\phi & \sqrt{r^2+a^2}\cos\theta\cos\phi & -\sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\sin\theta\sin\phi & \sqrt{r^2+a^2}\cos\theta\sin\phi & \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & V^{\alpha'}(x') = \Lambda^{\alpha'}_{\ \ \mu}V^\mu(x(x')) \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\sin\theta\cos\phi & \sqrt{r^2+a^2}\cos\theta\cos\phi & -\sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\sin\theta\sin\phi & \sqrt{r^2+a^2}\cos\theta\sin\phi & \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\phi \\ \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

3. a) Poichè la metrica $g_{\mu\nu}$ è diagonale, la sua inversa $g^{\mu\nu}$ è la matrice che ha sulla diagonale gli inversi delle componenti di $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \mathrm{diag}\left(-1, \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2}, r^2+a^2\cos^2\theta, (r^2+a^2)\sin^2\theta\right) \\ g^{\mu\nu} &= \mathrm{diag}\left(-1, \frac{r^2+a^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}, \frac{1}{r^2+a^2\cos^2\theta}, \frac{1}{(r^2+a^2)\sin^2\theta}\right) . \end{aligned} \tag{19}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\phi\phi} &= \frac{1}{2} g_{\phi\phi,r} = r\sin^2\theta \\ \Gamma_{\theta\phi\phi} &= \frac{1}{2} g_{\phi\phi,\theta} = (r^2+a^2)\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{20}$$

quindi

$$\begin{aligned} \Gamma^{\phi}_{r,\phi} &= g^{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{r\phi} = \frac{r}{r^2+a^2} \\ \Gamma^{\phi}_{\theta,\phi} &= g^{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \cot\theta\,. \end{aligned} \tag{21}$$

b) Si ha

$$V^{\mu} = (0,0,0,1) \tag{22}$$

quindi

$$V^{\phi}_{\ ;\nu} = V^{\phi}_{\ ,\nu} + \Gamma^{\phi}_{\nu\alpha}V^{\alpha} = \Gamma^{\phi}_{\nu\phi} \tag{23}$$

e

$$\begin{aligned} V^{\phi}_{\ ;r} &= \frac{r}{r^2+a^2} \\ V^{\phi}_{\ ;\theta} &= \cot\theta\,. \end{aligned} \tag{24}$$

PARTE II

Il percorso AB è una linea coordinata ϕ, quindi le equazioni del trasporto geodetico su di esso sono

$$V^{\mu}_{;\phi} = 0 \tag{25}$$

ovvero

$$\begin{aligned} V^t_{,\phi} &= 0 && (26)\\ V^r_{,\phi} &= -\Gamma^r_{\phi\phi}V^{\phi} = \frac{r^2+a^2}{r}V^{\phi} && (27)\\ V^{\theta}_{,\phi} &= 0 && (28)\\ V^{\phi}_{,\phi} &= -\Gamma^{\phi}_{\phi r}V^r = -\frac{r}{r^2+a^2}V^r\,. && (29) \end{aligned}$$

Essendo, in $\phi = 0$, $(V^t, V^r, V^{\theta}, V^{\phi}) = (0,0,0,1)$, si ha che:

- componenti t, θ:

$$V^t = V^{\theta} = 0 \;\forall\phi\,; \tag{30}$$

- componente ϕ: derivando la (29) e sostituendo la (27),

$$V^{\phi}_{,\phi\phi} = -V^{\phi} \tag{31}$$

  che integrata con la condizione iniziale

$$V^{\phi}(\phi = 0) = 1 \tag{32}$$

  dà

$$V^{\phi} = \cos\phi\,; \tag{33}$$

- componente r: dalla (29)

$$V^r = -\frac{r^2+a^2}{r}V^{\phi}_{,\phi} = \frac{r^2+a^2}{r}\sin\phi\,. \tag{34}$$

Di consequenza in B, dove $\phi = \pi$,

$$V^{\mu} = (0,0,0,-1)\,. \tag{35}$$