I ESONERO 8-11-2005 - Compito A

Sia data la varietà spazio-temporale descritta, nel riferimento O, dalle coordinate $\{x^\mu\} = (u, v, y, z)$ con metrica

$$ds^2 = -du dv + (y^2 + z^2) du^2 + dy^2 + dz^2 \,. \tag{1}$$

1. Dato il vettore $\vec{V}$, di componenti

$$V^\mu = (u, 0, y, z) \tag{2}$$

   calcolare le componenti della 1-forma $\tilde{V}$ ad esso associata mediante la metrica (1).

2. I simboli di Christoffel non nulli nella metrica (1) sono

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}{}^{y} &= -y \qquad \Gamma_{uu}{}^{z} = -z \\ \Gamma_{uy}{}^{v} &= -2y \qquad \Gamma_{uz}{}^{v} = -2z \,. \end{aligned} \tag{3}$$

   Calcolare

$$V^u{}_{;u} \qquad \text{e} \qquad V^v{}_{;u} \,. \tag{4}$$

3. Sia data la trasformazione di coordinate dal riferimento O al riferimento O' di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', z')$, legate alle coordinate $\{x^\mu\}$ dalle trasformazioni

$$x^\mu = x^\mu(x^{\alpha'}) \; : \qquad \begin{cases} u = t' + x' \\ v = t' - x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \tag{5}$$

   Determinare la metrica nel riferimento O'.

4. Determinare le grandezze

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_{\alpha'} &\equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \\ \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} &\equiv \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \end{aligned} \tag{6}$$

   associate al cambiamento di coordinate (5).

5. Dato il tensore che, nel riferimento O, ha componenti

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y & z \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ uv & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

determinare le sue componenti nel riferimento O'.

6. Sia dato il cammino $\mathcal{C}$ parametrizzato nel riferimento O' dalla curva

$$\begin{aligned} t' &= 0 \\ x' &= \lambda \\ y' &= \cos\lambda \\ z' &= \sin\lambda \end{aligned} \tag{8}$$

con $\lambda \in [0,1]$. Si calcoli la lunghezza di $\mathcal{C}$.

I ESONERO 8-11-2005 - Compito B

Sia data la varietà spazio-temporale descritta, nel riferimento O, dalle coordinate $\{x^\mu\} = (u, v, y, z)$ con metrica

$$ds^2 = -du dv + (y^2 + z^2) du^2 + dy^2 + dz^2\,. \tag{9}$$

1. Dato il vettore $\vec{V}$, di componenti

$$V^\mu = (0, v, z, y) \tag{10}$$

   calcolare le componenti della 1-forma $\tilde{V}$ ad esso associata mediante la metrica (9).

2. I simboli di Christoffel non nulli nella metrica (9) sono

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{uu}{}^{y} = -y & \Gamma_{uu}{}^{z} = -z \\ \Gamma_{uy}{}^{v} = -2y & \Gamma_{uz}{}^{v} = -2z\,. \end{array} \tag{11}$$

   Calcolare

$$V^{v}{}_{;v} \qquad \text{e} \qquad V^{v}{}_{;u}\,. \tag{12}$$

3. Sia data la trasformazione di coordinate dal riferimento O al riferimento O' di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', z')$, legate alle coordinate $\{x^\mu\}$ dalle trasformazioni

$$x^\mu = x^\mu(x^{\alpha'}) \;: \qquad \begin{cases} u = t' - x' \\ v = t' + x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \tag{13}$$

   Determinare la metrica nel riferimento O'.

4. Determinare le grandezze

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'} &\equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \\ \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} &\equiv \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \end{aligned} \tag{14}$$

   associate al cambiamento di coordinate (13).

5. Dato il tensore che, nel riferimento O, ha componenti

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y & z \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ uv & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

determinare le sue componenti nel riferimento O'.

6. Sia dato il cammino $\mathcal{C}$ parametrizzato nel riferimento O' dalla curva

$$\begin{aligned} t' &= \lambda \\ x' &= 0 \\ y' &= \cos\lambda \\ z' &= \sin\lambda \end{aligned} \tag{16}$$

con $\lambda \in [0,1]$. Si calcoli la lunghezza di $\mathcal{C}$.

SOLUZIONE - Compito A

1. Il tensore metrico ha componenti, in O,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

quindi

$$V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu = \begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y^2+z^2)u \\ -\frac{u}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} . \tag{18}$$

2.

$$\begin{aligned} V^u_{\ ;u} &= V^u_{\ ,u} + \Gamma_{u\mu}{}^u V^\mu = 1 \\ V^v_{\ ;u} &= V^v_{\ ,u} + \Gamma_{u\mu}{}^v V^\mu = \Gamma_{ux}{}^v V^x + \Gamma_{uy}{}^v V^y = -2(y^2+z^2) . \end{aligned} \tag{19}$$

3. Differenziando la (5) si ha

$$\begin{aligned} du &= dt' + dx' \\ dv &= dt' - dx' \\ dy &= dy' \\ dz &= dz' \end{aligned} \tag{20}$$

e sostituendo in (1) si ha

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dudv + (y^2+z^2)du^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -dt'^2 + dx'^2 + (y'^2+z'^2)(dt'+dx')^2 + dy'^2 + dz'^2 \\ &= -[1-(y'^2+z'^2)]dt'^2 + 2(y'^2+z'^2)dt'dx' \\ &\quad +[1+(y'^2+z'^2)]dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 . \end{aligned} \tag{21}$$

4. Si ha

$$\Lambda^\mu{}_{\alpha'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{22}$$

Se Λ è la matrice di componenti $\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}$, le grandezze $\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}$ sono le componenti della matrice inversa Λ^{-1}:

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{23}$$

5. Il tensore (7) ha coordinate, nel riferimento O',

$$T^{\alpha'\beta'}(x') = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}\Lambda^{\beta'}{}_{\nu}T^{\mu\nu}(x(x')) . \tag{24}$$

Data la matrice $\Lambda^{-1} = (\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu})$, e le matrici T, T' di componenti $T = (T^{\mu\nu})$, $T' = (T^{\alpha'\beta'})$, la (24) si può scrivere in forma matriciale come

$$T' = \Lambda^{-1}T(\Lambda^{-1})^T \tag{25}$$

ovvero

$$\begin{aligned} T' &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & y & z \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ uv & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{u}{4} & -\frac{u}{4} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \\ -\frac{u}{4} & \frac{u}{4} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{uv}{2} & \frac{uv}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{26}$$

Le componenti $T_{\alpha'\beta'}$ vanno espresse nelle coordinate $\{x^{\alpha'}\}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{t'+x'}{4} & -\frac{t'+x'}{4} & \frac{y'}{2} & \frac{z'}{2} \\ -\frac{t'+x'}{4} & \frac{t'+x'}{4} & \frac{y'}{2} & \frac{z'}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{(t')^2-(x')^2}{2} & \frac{(t')^2-(x')^2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{27}$$

6. La curva (8)

$$\begin{aligned} t' &= 0 \\ x' &= \lambda \\ y' &= \cos\lambda \\ z' &= \sin\lambda \end{aligned} \tag{28}$$

ha come vettore tangente

$$\frac{dx^{\alpha\prime}}{d\lambda} = (0, 1, -\sin\lambda, \cos\lambda)\,. \tag{29}$$

La metrica nel riferimento O' è

$$\begin{aligned} ds^2 &= -[1-(y'^2+z'^2)]dt'^2 + 2(y'^2+z'^2)dt'dx' \\ &\quad +[1+(y'^2+z'^2)]dx'^2 + dy'^2 + dz'^2\,. \end{aligned} \tag{30}$$

La lunghezza del cammino è

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{\alpha'\beta'}\frac{dx^{\alpha\prime}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta\prime}}{d\lambda}} \\ &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{x'x'}(\lambda) + \sin^2\lambda g_{y'y'}(\lambda) + \cos^2\lambda g_{z'z'}(\lambda)} \\ &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{3} = \sqrt{3}\,. \end{aligned} \tag{31}$$

SOLUZIONE - Compito B

1. Il tensore metrico ha componenti, in O,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

quindi

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu = \begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{2} \\ 0 \\ z \\ y \end{pmatrix} . \tag{33}$$

2.

$$\begin{aligned} V^v_{\ ;v} &= V^v_{\ ,v} + \Gamma_{v\mu}^{\ \ v} V^\mu = 1 \\ V^v_{\ ;u} &= V^v_{\ ,u} + \Gamma_{u\mu}^{\ \ v} V^\mu = \Gamma_{uy}^{\ \ v} V^y + \Gamma_{uz}^{\ \ v} V^z = -4zy \, . \end{aligned} \tag{34}$$

3. Differenziando la (13) si ha

$$\begin{aligned} du &= dt' - dx' \\ dv &= dt' + dx' \\ dy &= dy' \\ dz &= dz' \end{aligned} \tag{35}$$

e sostituendo in (9) si ha

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dudv + (y^2+z^2)du^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -dt'^2 + dx'^2 + (y'^2+z'^2)(dt'-dx')^2 + dy'^2 + dz'^2 \\ &= -[1-(y'^2+z'^2)]dt'^2 - 2(y'^2+z'^2)dt'dx' \\ &\quad +[1+(y'^2+z'^2)]dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \, . \end{aligned} \tag{36}$$

4. Si ha

$$\Lambda^\mu_{\ \alpha'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{37}$$

Se Λ è la matrice di componenti $\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}$, le grandezze $\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}$ sono le componenti della matrice inversa Λ^{-1}:

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{38}$$

5. Il tensore (15) ha coordinate, nel riferimento O',

$$T_{\alpha'\beta'}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}T_{\mu\nu}(x(x')) . \tag{39}$$

Data la matrice $\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\alpha'})$, e le matrici T, T' di componenti $T = (T_{\mu\nu})$, $T' = (T_{\alpha'\beta'})$, la (39) si può scrivere in forma matriciale come

$$T' = \Lambda^T T \Lambda \tag{40}$$

ovvero

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & y & z \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ uv & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & u & y & z \\ u & u & -y & -z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ uv & -uv & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{41}$$

Le componenti $T_{\alpha'\beta'}$ vanno espresse nelle coordinate $\{x^{\alpha'}\}$:

$$\begin{pmatrix} t' - x' & t' - x' & y' & z' \\ t' - x' & t' - x' & -y' & -z' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (t')^2 - (x')^2 & -(t')^2 + (x')^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{42}$$

6. La curva (16)

$$\begin{aligned} t' &= \lambda \\ x' &= 0 \\ y' &= \cos\lambda \\ z' &= \sin\lambda \end{aligned} \tag{43}$$

ha come vettore tangente

$$\frac{dx^{\alpha\prime}}{d\lambda} = (1, 0, -\sin\lambda, \cos\lambda)\,. \tag{44}$$

La metrica nel riferimento O' è

$$\begin{aligned} ds^2 &= -[1-(y'^2+z'^2)]dt'^2 - 2(y'^2+z'^2)dt'dx' \\ &\quad +[1+(y'^2+z'^2)]dx'^2 + dy'^2 + dz'^2\,. \end{aligned} \tag{45}$$

La lunghezza del cammino è

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{\alpha'\beta'}\frac{dx^{\alpha\prime}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta\prime}}{d\lambda}} \\ &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{t't'}(\lambda) + \sin^2\lambda g_{y'y'}(\lambda) + \cos^2\lambda g_{z'z'}(\lambda)} \\ &= \int_0^1 d\lambda = 1\,. \end{aligned} \tag{46}$$