RELATIVITÀ GENERALE - ESONERO 1-12-2011

Compito A

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (u, v, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = -du dv + \left(1 + \frac{1}{2}\sin u\right) dy^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sin u\right) dz^2 \, .$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^y_{uy} = \frac{1}{2}\frac{\cos u}{(2 + \sin u)} \, , \quad \Gamma^z_{uz} = \frac{1}{2}\frac{\cos u}{(-2 + \sin u)} \, , \quad \Gamma^v_{zz} = -\frac{1}{2}\cos u \, , \quad \Gamma^v_{yy} \, .$$

1. Calcolare il simbolo di Christoffel Γ^v_{yy}.
2. Dato il tensore T, di componenti nel riferimento O

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin u & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

   calcolare le componenti $T_\mu{}^\nu$.
3. Calcolare $T_{zu;z}$ e $T_{zv;y}$
4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', z')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\alpha)$

$$\begin{array}{rcl} t' & = & (u+v)/2 \\ x' & = & (v-u)/2 \\ y' & = & y/3 \\ z' & = & \sqrt{z} \end{array} \, ,$$

   definita per $z > 0$. Calcolare le componenti del tensore $T_{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

RELATIVITÀ GENERALE - ESONERO 1-12-2011

Compito B

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (u, v, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = du dv + \left(1 - \frac{1}{2}\sin u\right) dy^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\sin u\right) dz^2 \,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^y_{uy} = \frac{1}{2}\frac{\cos u}{(-2+\sin u)}\,, \quad \Gamma^z_{uz} = \frac{1}{2}\frac{\cos u}{(2+\sin u)}\,, \quad \Gamma^v_{yy} = \frac{1}{2}\cos u\,, \quad \Gamma^v_{zz}\,.$$

1. Calcolare il simbolo di Christoffel Γ^v_{zz}.
2. Dato il tensore T, di componenti nel riferimento O

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ y & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin u \end{pmatrix} \,.$$

   calcolare le componenti $T_\mu{}^\nu$.
3. Calcolare $T_{yu;y}$ e $T_{yv;z}$
4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', z')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\alpha)$

$$\begin{array}{rcl} t' &=& (u-v)/2 \\ x' &=& (u+v)/2 \\ y' &=& y/3 \\ z' &=& \sqrt{z} \end{array} \,.$$

   definita per $z > 0$. Calcolare le componenti del tensore $T_{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

Soluzioni

Compito A

La metrica e la metrica inversa sono

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{2}\sin u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{2}\sin u \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{2+\sin u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2-\sin u} \end{pmatrix}.$$

1.

$$\Gamma^v_{yy} = \frac{1}{2} g^{v\alpha}(g_{y\alpha,y} + g_{\alpha y,y} - g_{yy,\alpha}) = -\frac{1}{2} g^{vu} g_{yy,u} = \frac{1}{2}\cos u\,.$$

2.

$$\begin{aligned} T_\mu{}^\alpha &= T_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin u & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{2+\sin u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2-\sin u} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2\cos u & -2z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sin u}{2+\sin u} & 0 \\ -2y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} T_{zu;z} &= T_{zu,z} - \Gamma^\mu_{zz} T_{\mu u} - \Gamma^\mu_{uz} T_{z\mu} = -\Gamma^v_{zz} T_{vu} = \frac{1}{2} z\cos u \\ T_{zv;y} &= T_{zv,y} - \Gamma^\mu_{zy} T_{\mu v} - \Gamma^\mu_{vy} T_{z\mu} = T_{zv,y} = 1\,. \end{aligned}$$

4. La matrice cambiamento di coordinate è:

$$(\Lambda^\mu{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z' \end{pmatrix}$$

Si ha

$$T_{\alpha'\beta'} = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} T_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_{\beta'}$$

quindi definendo le matrici $T = (T_{\mu\nu})$, $T' = (T_{\alpha'\beta'})$, $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_{\alpha'})$, si trova

$$
\begin{aligned}
T' &= \Lambda^T T \Lambda \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin u & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ z'^2 + \cos(t' - x') & -z^{2'} + \cos(t' - x') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sin(t' - x') & 0 \\ 3y' & 3y' & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + z'^2 + \cos(t' - x') & 1 - z'^2 + \cos(t' - x') & 0 & 0 \\ -1 + z'^2 + \cos(t' - x') & -1 - z'^2 + \cos(t' - x') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9\sin(t' - x') & 0 \\ 6z'y' & 6z'y' & 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Compito B

La metrica e la metrica inversa sono

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{2}\sin u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\frac{1}{2}\sin u \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{2-\sin u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2+\sin u} \end{pmatrix}.$$

1.

$$\Gamma^v_{zz} = \frac{1}{2} g^{v\alpha}(g_{z\alpha,z} + g_{\alpha z,z} - g_{zz,\alpha}) = -\frac{1}{2} g^{vu} g_{zz,u} = -\frac{1}{2}\cos u\,.$$

2.

$$\begin{aligned} T_\mu{}^\alpha &= T_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ y & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{2-\sin u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2+\sin u} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2\cos u & 2y & 0 & 0 \\ 2z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sin u}{2+\sin u} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} T_{yu;y} &= T_{yu,y} - \Gamma^\mu_{yy} T_{\mu u} - \Gamma^\mu_{uy} T_{y\mu} = -\Gamma^v_{yy} T_{vu} = -\frac{1}{2} y \cos u \\ T_{yv;z} &= T_{yv,z} - \Gamma^\mu_{yz} T_{\mu v} - \Gamma^\mu_{vz} T_{y\mu} = T_{yv,z} = 1\,. \end{aligned}$$

4. La matrice cambiamento di coordinate è:

$$(\Lambda^\mu{}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z' \end{pmatrix}$$

Si ha

$$T_{\alpha'\beta'} = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} T_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_{\beta'}$$

quindi definendo le matrici $T = (T_{\mu\nu})$, $T' = (T_{\alpha'\beta'})$, $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_{\alpha'})$, si trova

$$
\begin{aligned}
T' &= \Lambda^T T \Lambda \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ y & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3y' - \cos(t' + x') & 3y' + \cos(t' + x') & 0 & 0 \\ -z'^2 & z'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z' \sin(t' + x') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 - 3y' + \cos(t' + x') & 1 - 3y' - \cos(t' + x') & 0 & 0 \\ -1 + 3y' - \cos(t' + x') & 1 + 3y' + \cos(t' + x') & 0 & 0 \\ -3z'^2 & 3z'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4z'^2 \sin(t' + x') \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$