Esonero corso di relatività generale - Compito A

16/12/2010

Nel sistema di riferimento $\mathcal{O}$ descritto dalle coordinate $\{x^\mu\} = \{u, r, \phi, z\}$ sia data la seguente metrica:

$$ds^2 = \frac{1}{u^2}\left(-du^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2\right).$$

e i simboli di Christoffel associati (quelli non elencati sono nulli):

$$\begin{aligned} \Gamma^u_{uu} = \Gamma^r_{ur} = \Gamma^\phi_{u\phi} = \Gamma^z_{uz} &= -\frac{1}{u}, \\ \Gamma^u_{rr} = \Gamma^u_{zz} = -\frac{1}{u}, \qquad \Gamma^u_{\phi\phi} &= -\frac{r^2}{u}, \\ \Gamma^r_{\phi\phi} \neq 0, \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} &\neq 0 \end{aligned}$$

Svolgere i seguenti esercizi:

1. Calcolare il simbolo di Christoffel $\Gamma^\phi_{r\phi}$.
2. Data la 1-forma $\tilde{W}$ descritta nel sistema di riferimento $\mathcal{O}$ dalle componenti

   $$W_\mu = \left(2u, 0, 0, r^2\right)$$

   calcolare le componenti $W_{\mu;r}$ della derivata covariante.
3. Dato il tensore T descritto nel sistema di riferimento $\mathcal{O}$ dalle componenti

   $$T^{\mu\nu} = u^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ -1 & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin\phi}{r^2} & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   si calcolino le componenti $T^\mu{}_\nu$ ottenute abbassando il secondo indice.
4. Si calcoli la componente $T^{ru}{}_{;r}$ della derivata covariante del tensore T
5. Sia data la seguente trasformazione dalle coordinate $\{x^\mu\} = \{u, r, \phi, z\}$ alle coordinate $\{x^{\alpha'}\} = \{t, x, y, \zeta\}$:

   $$\begin{aligned} t &= u + r^2 \\ x &= u - r \\ y &= \phi \\ \zeta &= z \end{aligned}$$

   Calcolare le componenti $T^{\alpha'\beta'}$ del tensore T nel nuovo sistema di riferimento (non si richiede di esprimere le componenti del tensore nelle coordinate $\{x^{\alpha'}\}$) .

Esonero corso di relatività generale - Compito B

16/12/2010

Nel sistema di riferimento $\mathcal{O}$ descritto dalle coordinate $\{x^\mu\} = \{u, r, \phi, z\}$ sia data la seguente metrica:

$$ds^2 = \frac{1}{u^2}\left(-du^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2\right).$$

e i simboli di Christoffel associati (quelli non elencati sono nulli):

$$\Gamma^u_{uu} = \Gamma^r_{ur} = \Gamma^\phi_{u\phi} = \Gamma^z_{uz} = -\frac{1}{u},$$
$$\Gamma^u_{rr} = \Gamma^u_{zz} = -\frac{1}{u}, \qquad \Gamma^u_{\phi\phi} = -\frac{r^2}{u},$$
$$\Gamma^r_{\phi\phi} \neq 0, \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} \neq 0$$

Svolgere i seguenti esercizi:

1. Calcolare il simbolo di Christoffel $\Gamma^r_{\phi\phi}$.
2. Dato il vettore $\vec{V}$ descritto nel sistema di riferimento $\mathcal{O}$ dalle componenti
$$V^\mu = (u, 0, 0, 2r)$$
calcolare le componenti $V^\mu{}_{;r}$ della derivata covariante.
3. Dato il tensore T descritto nel sistema di riferimento $\mathcal{O}$ dalle componenti
$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -r \\ 1 & \sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \end{pmatrix}$$
si calcolino le componenti $T^\mu{}_\nu$ ottenute innalzando il primo indice.
4. Si calcoli la componente $T_{zu;\phi}$ della derivata covariante del tensore T
5. Sia data la seguente trasformazione dalle coordinate $\{x^\mu\} = \{u, r, \phi, z\}$ alle coordinate $\{x^{\alpha'}\} = \{t, x, y, \zeta\}$:
$$\begin{aligned} u &= 2t - x \\ r &= t + 2x \\ \phi &= y \\ z &= \zeta \end{aligned}$$
Calcolare le componenti $T^{\alpha'\beta'}$ del tensore T nel nuovo sistema di riferimento (non si richiede di esprimere le componenti del tensore nelle coordinate $\{x^{\alpha'}\}$)

Soluzioni esonero corso di relatività generale - Compito A

1. $$\Gamma^{\phi}_{r\phi} = \frac{1}{r}$$

2. $$W_{\mu;r} = (0, 2, 0, 2r)$$

3. $$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ 1 & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

4. $$T^{ru}{}_{;r} = -u\cos\phi$$

5. Essendo
$$\Lambda^{-1} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 2r & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$
si ha che
$$\begin{aligned} T^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{-1} T \left(\Lambda^{-1}\right)^{T} &= u^2 \begin{pmatrix} 1 & 2r & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ -1 & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin\phi}{r^2} & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2r & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= u^2 \begin{pmatrix} 2r(r-1+2r\cos\phi) & -r(3+2\cos\phi) & 0 & 0 \\ 2r^2+1-2r\cos\phi & -r+1+\cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin\phi}{r^2} & 0 \\ 2r^2 & -r & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soluzioni esonero corso di relatività generale - Compito B

1. $$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r$$

2. $$V^\mu{}_{;r} = (0, -1, 0, 2)$$

3. $$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r \\ 1 & \sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \end{pmatrix},$$

4. $$T_{zu;\phi} = \frac{r}{u^3}$$

5. Essendo:
$$\Lambda = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
si ha che
$$\begin{aligned} T_{\alpha'\beta'} = \Lambda^T T \Lambda &= \frac{1}{u^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -r \\ 1 & \sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{u^2} \begin{pmatrix} 2+\sin\phi & -1+2\sin\phi & 0 & -2r \\ 4+2\sin\phi & -2+4\sin\phi & 0 & r \\ 0 & 0 & r^2\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$