I ESONERO 2-11-2006 - Compito B

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento M di coordinate $\{x^\mu\} = (u, r, \theta, \phi)$, dalla metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

con $M > 0$ costante.

I simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\begin{array}{llll} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^r_{ur} & \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^u_{\theta\theta} = r & \Gamma^r_{uu} = \frac{M}{r^3}(r - 2M) & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta \\ \Gamma^u_{\phi\phi} = r\sin^2\theta & \Gamma^r_{\theta\theta} = -r + 2M & & \\ & \Gamma^r_{\phi\phi} = -(r - 2M)\sin^2\theta & & \end{array}$$

1

Calcolare Γ^u_{uu}.

2

Dato il tensore T di rango $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, di componenti, nel riferimento M,

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r & u & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

calcolare la derivata covariante $T_{uu;u}$.

3

Calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$T_\mu{}^\nu \, .$$

4

Dato il riferimento M' di coordinate $\{x^{\alpha\prime}\} = (t', r', \theta', \phi')$, definito dalla trasformazione di coordinate

$$x^\mu = x^\mu(x^{\alpha\prime}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u &= t' + r' \\ r &= r' \\ \theta &= \theta' \\ \phi &= \phi' \end{cases} ,$$

calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ T nel riferimento M':

$$T_{\alpha\prime\beta'} \, .$$

Soluzioni compito B

1.

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2M}{r}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \\
g^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\frac{2M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix} \\
\Gamma^u_{uu} &= g^{u\alpha}\Gamma_{uu\alpha} = g^{ur}\Gamma_{uur} \\
\Gamma_{uur} &= \frac{1}{2}(g_{ur,u}+g_{ur,u}-g_{uu,r}) = -\frac{1}{2}g_{uu,r} = \frac{M}{r^2}
\end{aligned}
$$

quindi

$$\Gamma^u_{uu} = g^{ur}\Gamma_{uur} = -\frac{M}{r^2}\,.$$

2.

$$
\begin{aligned}
T_{uu;u} &= T_{uu,u} - \Gamma^\alpha_{uu}T_{\alpha u} - \Gamma^\alpha_{uu}T_{u\alpha} \\
&= -2\Gamma^u_{uu}T_{uu} - \Gamma^r_{uu}T_{ur} = \frac{2M}{r} - \frac{Mu}{r^3}(r-2M)\,.
\end{aligned}
$$

3.

$$
T_\mu{}^\nu = T_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} r & u & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\frac{2M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} -u & -r+u-\frac{2Mu}{r} & 0 & 0 \\ -r & r-2M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

4.

$$\Lambda = ({\Lambda^\mu}_{\alpha'}) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha\prime}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{\alpha\prime\beta\prime} = {\Lambda^\mu}_{\alpha\prime}{\Lambda^\nu}_{\beta\prime}T_{\mu\nu}\,.$$

Definendo le matrici T, T' di componenti

$$T = (T_{\mu\nu}) \qquad T' = (T_{\alpha\prime\beta\prime})$$

abbiamo l'equazione matriciale

$$\begin{aligned} T' &= \Lambda^T T \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' & t'+r' & 0 & 0 \\ 0 & r' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r'^2 \end{pmatrix} \Lambda \\ &= \begin{pmatrix} r' & t'+r' & 0 & 0 \\ r' & t'+2r' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r' & t'+2r' & 0 & 0 \\ r' & t'+3r' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r'^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$