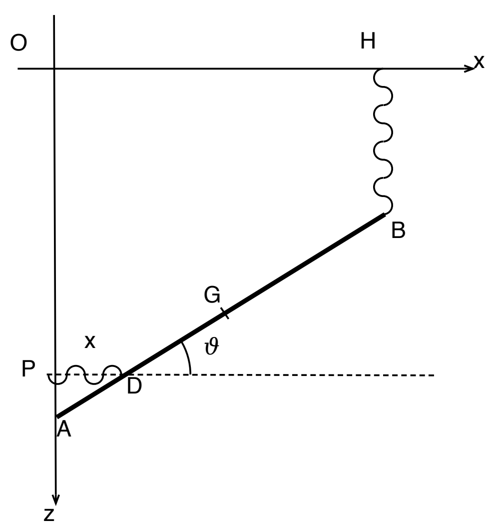
Meccanica Analitica e Relativistica - I Esonero - 14/12/2016

In un piano verticale è scelto un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali Oxz di origine O e con l'asse z orientato verso il basso. In tale piano si muove un'asta rigida omogenea di estremi A e B, massa M e lunghezza L (vd figura). Il punto D di tale asta dista $L/4$ dall'estremo A ed è obbligato a scorrere senza attrito su di una guida parallela all'asse x e passante per il punto P di coordinate $(0, d)$. Oltre alla forza peso l'asta è soggetta a due forze attive $\vec{F}_1 = -K\vec{PD}$ e $\vec{F}_2 = -K\vec{HB}$, dove $K > 0$ e H è la proiezione ortogonale di B sull'asse x. Scegliamo come coordinate lagrangiane per descrivere il sistema l'ascissa x del punto D e l'angolo θ che l'asta forma con la guida parallela all'asse x.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
2. Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità in funzione del parametro $\lambda = \frac{4d}{3L} - \frac{4Mg}{9LK}$.
3. Si ponga in queste domande $K = M = g = L = 1$ e $d = 10/9$. Scelta, quindi, una posizione di equilibrio stabile si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni.



II Esonero di Meccanica Analitica e Relativistica - 25/01/2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

1. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Due astronavi si muovono lungo l'asse x. Ambedue partono contemporaneamente dall'origine. La prima si muove con velocità $c/2$ per un tempo T, poi inverte il moto e torna con velocità $-c/4$ nell'origine, dove si ferma. La seconda si muove con velocità $c/3$ per un tempo $\frac{3}{2}T$, poi inverte il moto e torna con velocità $-c/3$ nell'origine, dove si ferma. I due astronauti avevano portato a bordo un orologio ciascuno. Una volta ambedue nell'origine li confrontano: chi ha segnato meno tempo e di quanto?

2. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un corpo di massa a riposo m si muove lungo l'asse x ed è soggetto ad un'energia potenziale $U(x) = A|x|^5$ (con $A > 0$). Sapendo che transita per l'origine con velocità v_0, si determini la massima distanza d dall'origine raggiunta.

3. Sia data la trasformazione

$$
\begin{aligned}
Q &= 16p^4q^2 \\
P &= -\frac{1}{32}q^\beta p^{-3}
\end{aligned}
$$

   Si dica per quali valori reali di β la trasformazione è canonica e si ricavi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

4. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate spazio-temporale (ct, x, y, z). Indicare se esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi

$$E_1 = (1, -\cos\alpha, -\sin\alpha, 1)\ , \qquad E_2 = (4, 0, 0, 1) \quad (\alpha = \pi/3)$$

   avvengono nella stessa posizione, e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

5. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo m, ferma nell'origine delle coordinate, viene urtata da una particella di massa a riposo $\frac{4}{5}m$ che si muove nel verso positivo dell'asse x con velocità $v = \frac{3}{5}c$. A seguito dell'urto, si produce un'unica particella di massa a riposo M che si muove con velocità V. Determinare M e V, assumendo assegnata m.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 27 febbraio 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

Esercizio 1

La sbarra rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L, è vincolata a ruotare senza attrito attorno al suo centro di massa, restando sempre sul piano xz, sul quale è adottato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale la cui origine O coincide con il centro di massa immobile della sbarra. Il punto materiale P, di massa m, è vincolato a muoversi senza attrito lungo l'asse w, giacente sul piano xz, perpendicolare ad AB e passante per O. Il punto P è collegato ad O da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, la cui accelerazione $\boldsymbol{g}$ è diretta nel verso positivo dell'asse z. Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che la sbarra AB forma con il verso positivo dell'asse z e l'ascissa ρ di P lungo l'asse w, come indicato in Fig. 1.

- Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.
- Siano ora $M = 6$, $m = 1$, $L = 4$, $K = 1$, $g = 1$. Scelta una posizione di equilibrio stabile, si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

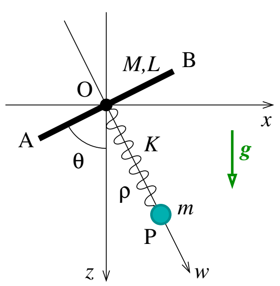


Fig. 1

Esercizio 2

Data la trasformazione

$$Q = p^{1/\alpha} q^{1/2}; \;\; P = -2(pq)^{1/2} \ln q$$

si dica per quali valori di α la trasformazione è canonica e si ricavi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica del 28 giugno 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

Esercizio 1

Una guida circolare rigida, di massa M e raggio R, è vincolata a ruotare attorno al suo punto fisso O sul piano orizzontale xy, sul quale è fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in O. Un punto materiale P di massa m può scorrere senza attrito lungo la guida circolare. Il punto P è collegato da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica K al punto H, proiezione ortogonale di P sulla retta $x = a$, con $a > 2R$. Sia C il centro della guida circolare. Si adottino come variabili lagrangiane l'angolo θ che il diametro OA della guida circolare forma con il verso positivo dell'asse x e l'angolo ϕ che il segmento CP forma con il verso positivo dell'asse ξ, parallelo all'asse x e passante per il punto C (si veda la Fig. 1).

- Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.
- Siano ora $a = 3R$, $M = 2m$, $K/m = 1$. Scelta una posizione di equilibrio stabile, si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

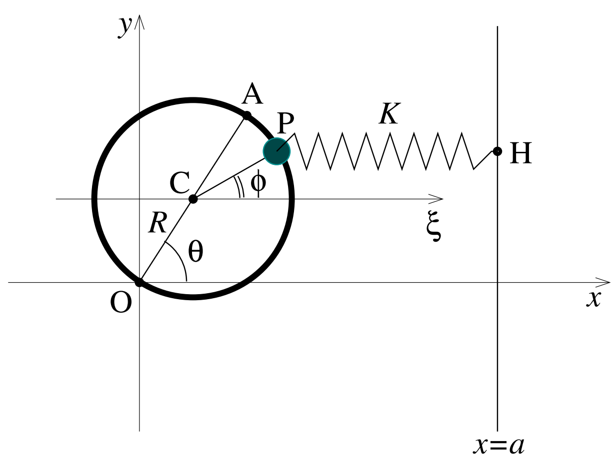


Fig. 1

Esercizio 2

Si determini per quale valore del parametro reale α la trasformazione

$$Q = \left(\frac{p}{2q}\right)^{\alpha}$$

$$P = -3\left(\frac{q^2 p}{2}\right)^{2\alpha}$$

è canonica e, in corrispondenza di tale valore, si trovi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

Esercizio 3

Due particelle relativistiche di massa m e velocità $v_1 = \frac{12}{13}c$ e $v_2 = \frac{5}{13}c$ si muovono nel verso positivo dell'asse x di un opportuno sistema di riferimento cartesiano, con la particella più veloce che segue la più lenta, di modo che ad un certo istante esse si urtano. A seguito dell'urto tra le due particelle, si forma un'unica particella di massa M e velocità u.

- Si determini u.
- Si determini il valore del rapporto M/m.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 14 luglio 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

Esercizio 1

In un piano verticale sia posto un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L. Sia S il punto dell'asta che si trova a distanza $3d$ dal punto A, con $L = 4d$. Il punto S dell'asta è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse delle z, ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine: $\underline{F_1} = -kOS$, $k > 0$. L'estremo A è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'asse delle x: $\underline{F_2} = -kHA$, $k > 0$, ove H è la proiezione del punto A sull'asse delle x (vedi figura). Si indichi con g l'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane la coordinata z di S e l'angolo ϕ che SA forma con l'asse z.

1. Scrivere la funzione di Lagrange del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).

2. Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero al variare di k.

3. Posto in questa domanda $M = 3$, $d = 1$, $k = 2$, $g = 3$, studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio e, scelta una posizione di equilibrio stabile, trovare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B. $I_G = \frac{ML^2}{12}$ (G= baricentro). Ricordiamo che la forza peso è presente.

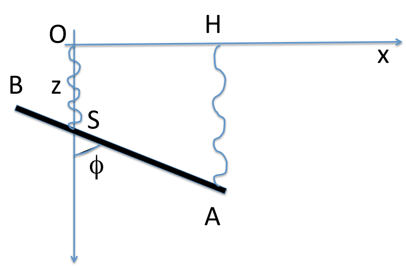


Fig. 1

Esercizio 2

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta.

Due astronavi si muovono lungo l'asse x. Ambedue partono contemporaneamente dall'origine. La prima si muove con velocità $c/4$ per un tempo $2T$, poi si ferma. La seconda si muove, nello stesso verso della prima, con velocità $c/2$ per un tempo $2T$, poi inverte il moto e si dirige verso la prima astronave con velocità $-c/2$ fino a quando la incontra, e lì si ferma.

1. I due astronauti avevano portato a bordo un orologio ciascuno. Quando si incontrano li confrontano: chi ha segnato meno tempo e di quanto?

2. In ognuna delle due astronavi c'è una telecamera che mostra il quadrante di un orologio e ne invia l'immagine a terra mediante un segnale elettromagnetico. Al tempo T (misurato a terra) dopo la partenza delle astronavi, queste immagini vengono osservate e confrontate. Quanto tempo segnano gli orologi mostrati nelle immagini?

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 1 settembre 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

Esercizio 1

In un piano verticale sia posto un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove un'asta rigida, omogenea e pesante AB, di massa m e lunghezza l. L'estremo A dell'asta può scivolare senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse w, che forma angoli di 45° con gli assi x e z (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine, $\underline{F_1} = -k\,\overline{OA}$, $k > 0$. L'estremo B è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,\overline{HB}$, $k > 0$, dove H è la proiezione di B sull'asse delle x (si veda la Fig. 1). Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa ξ di A lungo l'asse w e l'angolo θ che l'asta AB forma con la direzione verticale discendente (si veda la Fig. 1).

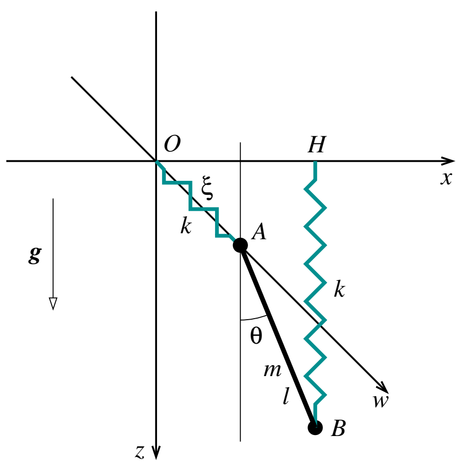


Fig. 1

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).

2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di k.

3. Ponendo ora $m = 2$, $l = 1$, $k = 2$, $g = 8$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa è $I_G = \frac{ml^2}{12}$ (G= centro di massa di AB). Si ricordi che la forza peso è presente.

Esercizio 2

Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkovski (x, y, z, ct) i due eventi $E_1 = (1, 5, 3, 2)$ e $E_2 = (3, 5, 3, \alpha)$, con α parametro reale.

1. Per quali valori di α esiste un sistema di riferimento inerziale in cui i due eventi sono simultanei?

2. Trovare, in funzione dei valori di α ammissibili, la velocità $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ di tale sistema di riferimento.