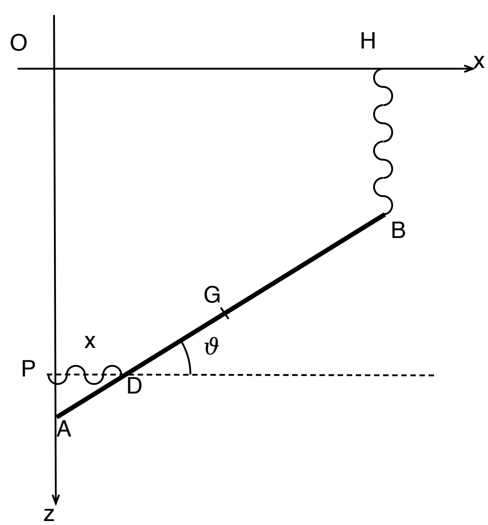
Meccanica Analitica e Relativistica - I Esonero - 14/12/2016

In un piano verticale è scelto un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali Oxz di origine O e con l'asse z orientato verso il basso. In tale piano si muove un'asta rigida omogenea di estremi A e B, massa M e lunghezza L (vd figura). Il punto D di tale asta dista $L/4$ dall'estremo A ed è obbligato a scorrere senza attrito su di una guida parallela all'asse x e passante per il punto P di coordinate $(0, d)$. Oltre alla forza peso l'asta è soggetta a due forze attive $\vec{F}_1 = -K\vec{PD}$ e $\vec{F}_2 = -K\vec{HB}$, dove $K > 0$ e H è la proiezione ortogonale di B sull'asse x. Scegliamo come coordinate lagrangiane per descrivere il sistema l'ascissa x del punto D e l'angolo θ che l'asta forma con la guida parallela all'asse x.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.

2. Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero e la stabilità in funzione del parametro $\lambda = \frac{4d}{3L} - \frac{4Mg}{9LK}$.

3. Si ponga in queste domande $K = M = g = L = 1$ e $d = 10/9$. Scelta, quindi, una posizione di equilibrio stabile si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni.



II Esonero di Meccanica Analitica e Relativistica - 25/01/2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

1. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Due astronavi si muovono lungo l'asse x. Ambedue partono contemporaneamente dall'origine. La prima si muove con velocità $c/2$ per un tempo T, poi inverte il moto e torna con velocità $-c/4$ nell'origine, dove si ferma. La seconda si muove con velocità $c/3$ per un tempo $\frac{3}{2}T$, poi inverte il moto e torna con velocità $-c/3$ nell'origine, dove si ferma. I due astronauti avevano portato a bordo un orologio ciascuno. Una volta ambedue nell'origine li confrontano: chi ha segnato meno tempo e di quanto?

2. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un corpo di massa a riposo m si muove lungo l'asse x ed è soggetto ad un'energia potenziale $U(x) = A|x|^5$ (con $A > 0$). Sapendo che transita per l'origine con velocità v_0, si determini la massima distanza d dall'origine raggiunta.

3. Sia data la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= 16p^4q^2 \\ P &= -\frac{1}{32}q^\beta p^{-3} \end{aligned}$$

Si dica per quali valori reali di β la trasformazione è canonica e si ricavi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

4. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate spazio-temporale (ct, x, y, z). Indicare se esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi

$$E_1 = (1, -\cos\alpha, -\sin\alpha, 1)\ , \qquad E_2 = (4, 0, 0, 1) \quad (\alpha = \pi/3)$$

avvengono nella stessa posizione, e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

5. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo m, ferma nell'origine delle coordinate, viene urtata da una particella di massa a riposo $\frac{4}{5}m$ che si muove nel verso positivo dell'asse x con velocità $v = \frac{3}{5}c$. A seguito dell'urto, si produce un'unica particella di massa a riposo M che si muove con velocità V. Determinare M e V, assumendo assegnata m.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 27 febbraio 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

Esercizio 1

La sbarra rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L, è vincolata a ruotare senza attrito attorno al suo centro di massa, restando sempre sul piano xz, sul quale è adottato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale la cui origine O coincide con il centro di massa immobile della sbarra. Il punto materiale P, di massa m, è vincolato a muoversi senza attrito lungo l'asse w, giacente sul piano xz, perpendicolare ad AB e passante per O. Il punto P è collegato ad O da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, la cui accelerazione $\boldsymbol{g}$ è diretta nel verso positivo dell'asse z. Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che la sbarra AB forma con il verso positivo dell'asse z e l'ascissa ρ di P lungo l'asse w, come indicato in Fig. 1.

- Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.
- Siano ora $M = 6$, $m = 1$, $L = 4$, $K = 1$, $g = 1$. Scelta una posizione di equilibrio stabile, si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

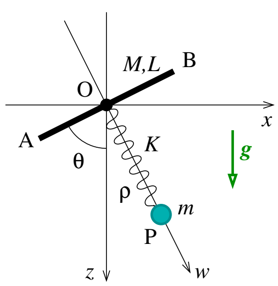


Fig. 1

Esercizio 2

Data la trasformazione

$$Q = p^{1/\alpha} q^{1/2}; \quad P = -2(pq)^{1/2} \ln q$$

si dica per quali valori di α la trasformazione è canonica e si ricavi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica del 28 giugno 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

Esercizio 1

Una guida circolare rigida, di massa M e raggio R, è vincolata a ruotare attorno al suo punto fisso O sul piano orizzontale xy, sul quale è fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in O. Un punto materiale P di massa m può scorrere senza attrito lungo la guida circolare. Il punto P è collegato da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica K al punto H, proiezione ortogonale di P sulla retta $x = a$, con $a > 2R$. Sia C il centro della guida circolare. Si adottino come variabili lagrangiane l'angolo θ che il diametro OA della guida circolare forma con il verso positivo dell'asse x e l'angolo ϕ che il segmento CP forma con il verso positivo dell'asse ξ, parallelo all'asse x e passante per il punto C (si veda la Fig. 1).

- Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne determini la stabilità.
- Siano ora $a = 3R$, $M = 2m$, $K/m = 1$. Scelta una posizione di equilibrio stabile, si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

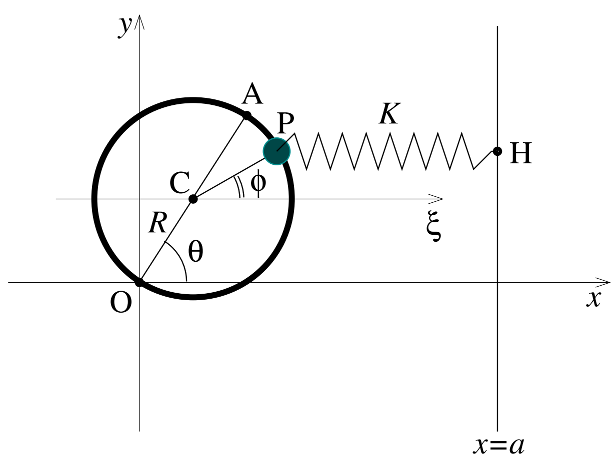


Fig. 1

Esercizio 2

Si determini per quale valore del parametro reale α la trasformazione

$$Q = \left(\frac{p}{2q}\right)^{\alpha}$$

$$P = -3\left(\frac{q^2 p}{2}\right)^{2\alpha}$$

è canonica e, in corrispondenza di tale valore, si trovi la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

Esercizio 3

Due particelle relativistiche di massa m e velocità $v_1 = \frac{12}{13}c$ e $v_2 = \frac{5}{13}c$ si muovono nel verso positivo dell'asse x di un opportuno sistema di riferimento cartesiano, con la particella più veloce che segue la più lenta, di modo che ad un certo istante esse si urtano. A seguito dell'urto tra le due particelle, si forma un'unica particella di massa M e velocità u.

- Si determini u.
- Si determini il valore del rapporto M/m.

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 14 luglio 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

Esercizio 1

In un piano verticale sia posto un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove una asta omogenea pesante AB di massa M e lunghezza L. Sia S il punto dell'asta che si trova a distanza $3d$ dal punto A, con $L = 4d$. Il punto S dell'asta è obbligato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse delle z, ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine: $\underline{F_1} = -kOS$, $k > 0$. L'estremo A è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'asse delle x: $\underline{F_2} = -kHA$, $k > 0$, ove H è la proiezione del punto A sull'asse delle x (vedi figura). Si indichi con g l'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane la coordinata z di S e l'angolo ϕ che SA forma con l'asse z.

1. Scrivere la funzione di Lagrange del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).

2. Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne il numero al variare di k.

3. Posto in questa domanda $M = 3$, $d = 1$, $k = 2$, $g = 3$, studiare la stabilità delle posizioni di equilibrio e, scelta una posizione di equilibrio stabile, trovare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B. $I_G = \frac{ML^2}{12}$ (G= baricentro). Ricordiamo che la forza peso è presente.

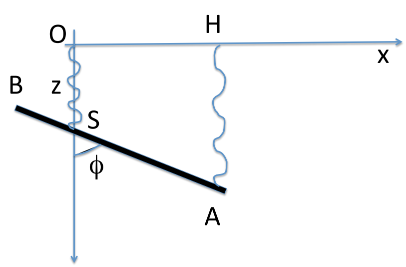


Fig. 1

Esercizio 2

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta.

Due astronavi si muovono lungo l'asse x. Ambedue partono contemporaneamente dall'origine. La prima si muove con velocità $c/4$ per un tempo $2T$, poi si ferma. La seconda si muove, nello stesso verso della prima, con velocità $c/2$ per un tempo $2T$, poi inverte il moto e si dirige verso la prima astronave con velocità $-c/2$ fino a quando la incontra, e lì si ferma.

1. I due astronauti avevano portato a bordo un orologio ciascuno. Quando si incontrano li confrontano: chi ha segnato meno tempo e di quanto?

2. In ognuna delle due astronavi c'è una telecamera che mostra il quadrante di un orologio e ne invia l'immagine a terra mediante un segnale elettromagnetico. Al tempo T (misurato a terra) dopo la partenza delle astronavi, queste immagini vengono osservate e confrontate. Quanto tempo segnano gli orologi mostrati nelle immagini?

Scritto di Meccanica Analitica e Relativistica - 1 settembre 2017
Proff. S. Caprara, M. Grilli, L. Gualtieri

Esercizio 1

In un piano verticale sia posto un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove un'asta rigida, omogenea e pesante AB, di massa m e lunghezza l. L'estremo A dell'asta può scivolare senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse w, che forma angoli di 45° con gli assi x e z (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine, $\underline{F_1} = -k\,\overline{OA}$, $k > 0$. L'estremo B è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,\overline{HB}$, $k > 0$, dove H è la proiezione di B sull'asse delle x (si veda la Fig. 1). Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa ξ di A lungo l'asse w e l'angolo θ che l'asta AB forma con la direzione verticale discendente (si veda la Fig. 1).

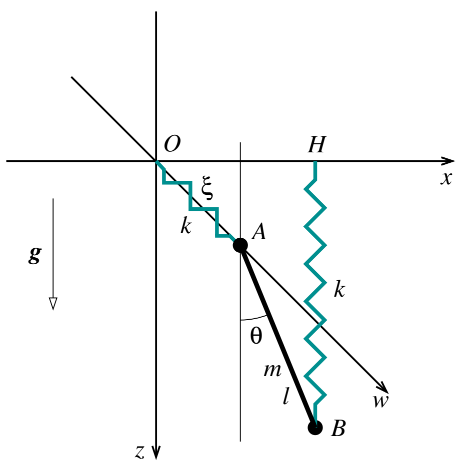


Fig. 1

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).

2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di k.

3. Ponendo ora $m = 2$, $l = 1$, $k = 2$, $g = 8$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa è $I_G = \frac{ml^2}{12}$ (G= centro di massa di AB). Si ricordi che la forza peso è presente.

Esercizio 2

Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkovski (x, y, z, ct) i due eventi $E_1 = (1, 5, 3, 2)$ e $E_2 = (3, 5, 3, \alpha)$, con α parametro reale.

1. Per quali valori di α esiste un sistema di riferimento inerziale in cui i due eventi sono simultanei?

2. Trovare, in funzione dei valori di α ammissibili, la velocità $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ di tale sistema di riferimento.

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica - 22 novembre 2017
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove una guida circolare rigida, omogenea, di centro C, massa M e raggio R. Il punto A della guida circolare è vincolato a scivolare senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine, $\underline{F_1} = -k\,\mathrm{OA}$, $k > 0$. Il punto B della guida circolare, diametralmente opposto rispetto ad A, è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,\mathrm{HB}$, $k > 0$, dove H è la proiezione di B sulla retta $x = a$ (si veda la Fig. 1). La guida circolare è libera di ruotare attorno ad un asse passante per A e perpendicolare al piano assegnato.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che il diametro AB forma con l'asse x (si veda la Fig. 1).

1. Si scrivano la funzione di Lagrange del sistema e le equazioni del moto.

2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$.

3. Ponendo ora $M = 1$, $k = 2$, $a = R = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia della guida circolare rispetto al suo centro di massa, coincidente con il centro C, è $I_{\mathrm{C}} = MR^2$.

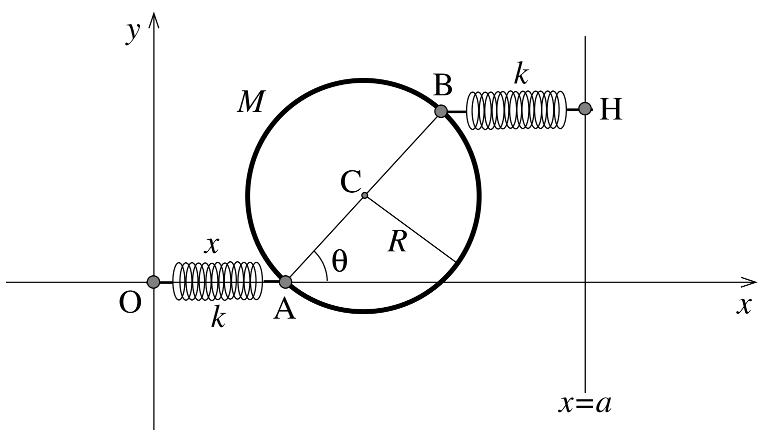


Fig. 1

Esonero di Meccanica Analitica e Relativistica del 17 gennaio 2018

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Si risolvano gli esercizi **1**,**2**,**3** e un esercizio a scelta tra **4a** e **4b**.

1. Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= q^\alpha \log p \\ P &= -q\, p^\beta \end{aligned}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F(q, Q)$.

2. Trasformazioni di Lorentz. Si risolva il seguente problema nell?ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati due eventi E_1, E_2 di coordinate, nel riferimento dato,

$$E_1 = (1, 1, 0, 0) \qquad E_2 = (4, 1, 1, 0)\,.$$

1. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

2. Determinare la separazione temporale $c\delta t'$ tra gli eventi E_1, E_2 nel nuovo riferimento.

3. Cinematica relativistica. Dopo aver sincronizzato gli orologi, due astronauti (A e B) partono all'istante $t = 0$ dall'origine O di un sistema di coordinate cartesiane fissato sul piano Oxy. L'astronauta A percorre un tratto di lunghezza L nel verso positivo dell'asse x, con velocità $\frac{c}{2}$, un tratto di lunghezza L nel verso positivo dell'asse y, con velocità $\frac{c}{2}$, un tratto di lunghezza L nel verso negativo dell'asse x, con velocità $\frac{c}{4}$, e ritorna in O percorrendo un tratto di lunghezza L nel verso negativo dell'asse y, con velocità $\frac{c}{4}$. La traiettoria dell'astronauta A è dunque un quadrato. L'astronauta B percorre in andata e ritorno la diagonale dello stesso quadrato, con velocità $\frac{c\sqrt{2}}{6}$. Verificare che i due astronauti impiegano lo stesso tempo T (misurato da un orologio rimasto in quiete in O) per completare i rispettivi tragitti e determinare T. Quando i due astronauti si incontrano nuovamente in O, confrontano i loro orologi, che segnano, rispettivamente, τ_A e τ_B. Determinare τ_A e τ_B e indicare quale dei due tempi è il più piccolo.

4a. Dinamica relativistica. Una particella relativistica di massa propria m è vincolata a muoversi lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa la cui energia potenziale è $V(x) = \gamma x^4$, dove $\gamma > 0$ è un parametro dimensionale. La massima distanza dall'origine raggiunta dalla particella è d. Determinare la velocità v_0 con la quale la particella transita per l'origine. Sotto quale condizione su d si recupera il risultato classico per v_0?

4b. Urti. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo m si muove lungo l'asse x con velocità $v_1 = -\frac{3}{5}c$ e collide con una particella di massa a riposo $\frac{3}{4}m$ che viaggia sempre lungo l'asse x con velocità $v_2 = \frac{4}{5}c$. In seguito all'urto, si produce un'unica particella di massa a riposo M che si muove con velocità V. Determinare M e V assumendo assegnata m.

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica - 6 febbraio 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana

In un piano verticale, in cui è fissato un sistema di assi cartesiani Oxz, con l'asse z verticale discendente, si muove un'asta rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L, il cui estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo la guida circolare γ, di centro O e raggio $R = L$. L'estremo B dell'asta è soggetto alla forza $\underline{F_e} = -K\,\mathrm{HB}$, $K > 0$, con H proiezione ortogonale di B sull'asse x. Si adottino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che OA forma con l'asse z e l'angolo ϕ che AB forma con la verticale discendente (si veda la Fig. 1). Sia $g > 0$ l'intensità dell'accelerazione di gravità. Nello svolgimento, per comodità, si ponga $Mg = fKL$, $f > 0$.

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema (per mancanza di tempo, non sono richieste le equazioni del moto).

2. Si trovino le otto posizioni di equilibrio del sistema e si discuta, al variare di $f > 0$, la stabilità di quelle con $\theta, \phi \in [0, \pi]$, le altre essendo equivalenti a queste per simmetria.

3. Ponendo ora $M = 1$, $K = 1$, $L = R = 1$, $g = 6$ (ovvero $f = 6$), si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è $I_G = \frac{1}{12}ML^2$.

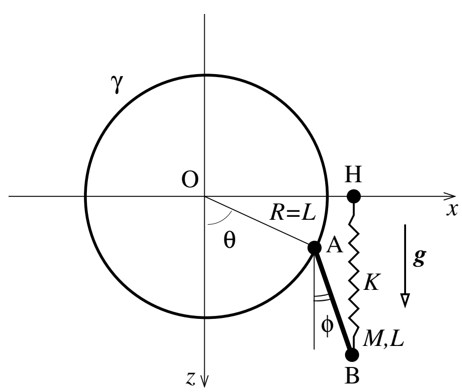


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche

Data la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{3}\, q^{-1/2}\, p^{\alpha} \\ P &= q^{3/2}\, p^{\beta} \end{aligned}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_3(p, Q)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkovski (ct, x, y, z) i due eventi $E_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $E_2 = (4, \alpha, \alpha, 0)$.

1. Determinare per quali valori di α esistono sistemi di riferimento inerziali in cui i due eventi sono simultanei.
2. Trovare la velocità $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ di uno di questi sistemi di riferimento in funzione di α.
3. Posto $\alpha = \frac{5}{\sqrt{2}}$, determinare la distanza spaziale tra i due eventi nel sistema di riferimento in cui sono simultanei.

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica - 20 Febbraio 2018

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana e Hamiltoniana

In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove un'asta rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L. Il centro di massa G dell'asta è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine O, $\underline{F_1} = -K\,\mathrm{OG}$, $K > 0$. L'estremo B dell'asta è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -K\,\mathrm{PB}$, $K > 0$, dove P è il punto di coordinate $(a, 0)$, con $a \in \mathbb{R}$. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di G e l'angolo θ che l'asta AB forma con l'asse x (si veda la Fig. 1).

1. Si scrivano la funzione di Lagrange L del sistema e le equazioni del moto.

2. Si ricavi l'espressione dei momenti coniugati, p_x e p_θ, e della Hamiltoniana H.

3. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$.

4. Ponendo ora $M = 1$, $K = 1$, $L = a = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{12} M L^2$.

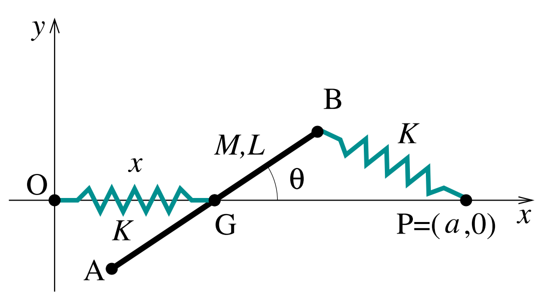


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

Data la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= e^{2q}\, p^{\alpha} \\ P &= \beta\, p^2\, e^{-2q} \end{aligned}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un'astronave parte dalla Terra muovendosi lungo l'asse x con una velocità pari a $c/2$. Dopo un intervallo tempo $T_0 = 1$ anno, dalla Terra viene inviato un messaggio radio con il quale si richiede che l'astronave torni indietro. Appena ricevuto il messaggio, l'astronave inverte la direzione del moto e si dirige verso la Terra con una velocità pari a $2c/3$.

1. Determinare, nel sistema di riferimento della Terra, quanto tempo è trascorso dalla partenza quando l'astronave riceve il messaggio, e che distanza essa ha percorso in quell'istante.

2. Quando l'astronave torna sulla Terra, gli astronauti confrontano il loro orologio con un orologio rimasto sulla Terra. Quale orologio ha segnato meno tempo, e di quanto?

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 6 luglio 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove un disco rigido e omogeneo, di raggio R e massa M. Il punto A sul bordo del disco è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Oy. Il disco è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per A. Il punto B del disco, diametralmente opposto ad A, è attratto verso il punto fisso P$=(a,0)$ da una forza elastica $\underline{F} = -K\,\mathrm{PB}$, con $K > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ordinata y di A e l'angolo θ che il diametro AB del disco forma con il verso positivo dell'asse Oy (si veda la Fig. 1).
1. Si scrivano la funzione di Lagrange L del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $a/R \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $a = R = 1$, $K = 1$, $M = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa G è $I_G = \frac{1}{2}MR^2$.

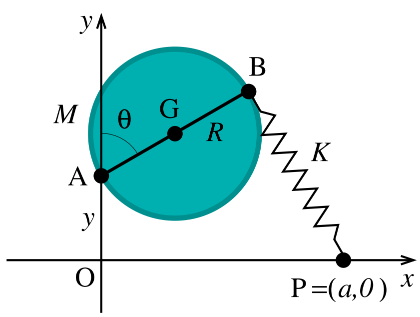


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$q = \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{1}{6}} p^{-\frac{2}{9}}$$
$$P = 3\,p^{-\left(\frac{2\mu+3}{9}\right)} \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{\mu}{6}}$$

dalle variabili canoniche Q, p alle variabili q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, μ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un'astronave parte dalla Terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{3}{5}c$. Quando a bordo è trascorso un tempo $4T_0$ (con $T_0 = 1$ anno), l'astronave inverte il verso del moto e torna a Terra, muovendosi con velocità $v_2 = \frac{c}{2}$. Determinare, al ritorno a Terra dell'astronave, quanto tempo è trascorso dalla sua partenza nel sistema di riferimento solidale con la Terra, e nel sistema di riferimento solidale con l'astronave.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 6 luglio 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_G = R\sin\theta$, $y_G = y + R\cos\theta$, $x_B = 2R\sin\theta$, $y_B = y + 2R\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2\right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{y}^2 + \frac{3}{2}R^2\,\dot{\theta}^2 - 2R\sin\theta\,\dot{y}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2\right] = \frac{1}{2}K\left(y^2 + 4Ry\cos\theta - 4Ra\sin\theta\right) + 4R^2 + a^2.$$

La funzione di Lagrange è $L = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$M\left(\ddot{y} - R\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left(y + 2R\cos\theta\right), \qquad M\left(\frac{3}{2}R^2\,\ddot{\theta} - R\sin\theta\,\ddot{y}\right) = 2KR\left(y\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K(y + 2R\cos\theta), \qquad \partial_\theta U = -2KR\left(y\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$y = -2R\cos\theta, \qquad (2R\sin\theta - a)\cos\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $y_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $y_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{a}{2R}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$, cioè $y_3 = -\sqrt{4R^2 - a^2}$ e $y_4 = \sqrt{4R^2 - a^2}$. Queste due posizioni esistono solo se

$$-1 < \frac{a}{2R} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad -2 < \frac{a}{R} < 2.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{yy}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = 2KR\left(a\sin\theta - y\cos\theta\right), \quad \partial^2_{y\theta}U = \partial^2_{\theta y}U = -2KR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $2K^2R(a - 2R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (y_1, θ_1) è stabile per $\frac{a}{R} > 2$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-2K^2R(a + 2R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) è stabile per $\frac{a}{R} < -2$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $4K^2R^2\cos^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $-2 < \frac{a}{R} < 2$.

Riassumendo, per $\frac{a}{R} < -2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima instabile e la seconda stabile; per $-2 < \frac{a}{R} < 2$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{a}{R} > 2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{y}\dot{y}} = M, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{3}{2}MR^2, \qquad T_{\dot{y}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{y}} = -MR\sin\theta = -\frac{1}{2}Ma.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K, \qquad U_{\theta\theta} = 4KR^2, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -Ka.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$R^2\left(K - M\omega^2\right)\left(4K - \frac{3}{2}M\omega^2\right) - a^2\left(K - \frac{1}{2}M\omega^2\right)^2 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$5\,\omega^4 - 18\,\omega^2 + 12 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 2.717,\ \omega_-^2 = 0.8835.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.648$ e $\omega_- = 0.9399$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q e P come funzioni di q e p otteniamo:

$$\begin{aligned} Q &= \alpha\, q^6\, p^{4/3}, \\ P &= 3\, q^\mu\, p^{-1/3}. \end{aligned}$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene $\mu = -5$ e $\alpha = \frac{1}{14}$. Sappiamo che

$$dF_2(q, P) \;=\; p\, dq \;+\; Q\, dP.$$

Per ottenere $F_2(q, P)$ bisogna quindi esprimere p e Q come funzioni di q e P. Ottrniamo:

$$\begin{aligned} p &= 27\, q^{-15}\, P^{-3}, \\ Q &= \frac{81}{14}\, p^{-4}\, q^{-14}, \end{aligned}$$

ed integrando $p\, dq$ o, alternativamente, $Q\, dP$ otteniamo

$$F_2(q, P) = -\frac{27}{14}\, q^{-14}\, p^{-3}.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Prendendo come origine del tempo coordinato t e del tempo proprio dell'astronave τ l'istante in cui l'astronave parte, siano t_1, τ_1 il tempo coordinato e il tempo proprio nel momento in cui questa inverte il suo senso di marcia, e siano t_2, τ_2 il tempo coordinato e il tempo proprio al ritorno a terra. Sarà, essendo $v_1 = \frac{3}{5}c$ e $v_2 = \frac{c}{2}$,

$$\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}t_1 = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}t_1 = \frac{4}{5}t_1 = 4T_0 \quad \rightarrow \quad t_1 = 5T_0 \, ,$$

la posizione dell'astronave quando inverte il senso di marcia sarà

$$\bar{x} = v_1 t_1 = 3cT_0 \, .$$

Nel viaggio di ritorno l'astronave impiega un tempo coordinato

$$t_2 - t_1 = \frac{\bar{x}}{v_2} = 6T_0$$

e un tempo proprio

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}(t_2 - t_1) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}6T_0 = 3\sqrt{3}T_0 \, ,$$

quindi

$$t_2 = 6T_0 + 5T_0 = 11T_0 \, , \qquad \tau_2 = (3\sqrt{3} + 4)T_0 \, .$$

Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 3 settembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una lamina quadrata rigida e omogenea, ABCD, di lato L e massa M. Il vertice A della lamina è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox. La lamina è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per A. Il vertice C della lamina è attratto verso il punto fisso P$= (0, a)$ da una forza elastica $\underline{F} = -K\,\mathrm{PC}$, con $K > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che la diagonale AC della lamina forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\frac{a}{L} \in [0, +\infty)$.
3. Ponendo ora $\frac{a}{L} = 1$, $\frac{K}{M} = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della lamina quadrata rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{6}ML^2$.

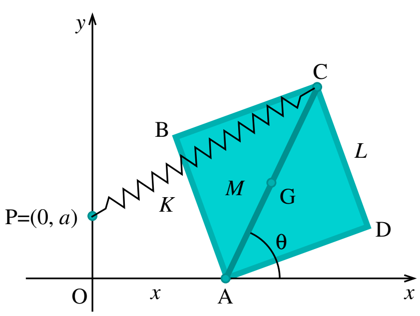


Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= 2\,(36)^{\gamma}\,P^{2\gamma}\,e^{(\alpha-2\beta\gamma)\,q} \\ p &= 36\,P^2\,e^{-2\beta\,q} \end{aligned}$$

dalle variabili canoniche P, q alle variabili Q, p, dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate spazio-temporale

(ct, x, y, z). Siano dati i due eventi

$$E_1 = (2\alpha, 1, \alpha, 3)\,, \qquad E_2 = (\alpha, 1, 1, 3)$$

1. Indicare per quali valori del parametro reale α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 sono contemporanei, e, per questi valori di α, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

2. Indicare per quali valori del parametro reale α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, per questi valori di α, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

3. Nel caso $\alpha = 2$, determinare la separazione temporale tra gli eventi nel sistema di riferimento in cui questi avvengono nella stessa posizione.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 3 settembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_{\rm G} = x + \frac{\sqrt{2}}{2}L\cos\theta$, $y_{\rm G} = \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta$, $x_{\rm C} = x + \sqrt{2}L\cos\theta$, $y_{\rm C} = \sqrt{2}L\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{2}{3}L^2\,\dot{\theta}^2 - \sqrt{2}L\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_{\rm C} - x_{\rm P})^2 + (y_{\rm C} - y_{\rm P})^2\right] = \frac{1}{2}K\left(x^2 + 2\sqrt{2}Lx\cos\theta - 2\sqrt{2}La\sin\theta\right) + \frac{1}{2}K\left(2L^2 + a^2\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$M\left(\ddot{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left(x + \sqrt{2}L\cos\theta\right),$$

$$M\left(\frac{2}{3}L^2\,\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta\,\ddot{x}\right) = \sqrt{2}KL\,(x\sin\theta + a\cos\theta)\,.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K\left(x + \sqrt{2}L\cos\theta\right), \qquad \partial_\theta U = -\sqrt{2}KL\,(x\sin\theta + a\cos\theta)\,.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -\sqrt{2}L\cos\theta, \qquad \left(\sqrt{2}L\sin\theta - a\right)\cos\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $x_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{\sqrt{2}a}{2L}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$, cioè $x_3 = -\sqrt{2L^2 - a^2}$ e $x_4 = \sqrt{2L^2 - a^2}$. Poiché la traccia assegna $a \geq 0$, aueste due posizioni esistono solo se

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}a}{2L} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \sqrt{2}KL\,(a\sin\theta - x\cos\theta)\,, \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = -\sqrt{2}KL\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $\sqrt{2}K^2L(a - \sqrt{2}L)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\frac{a}{L} > \sqrt{2}$.

L'hessiano nella seconda posizione vale $-\sqrt{2}K^2L(a+\sqrt{2}L)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\frac{a}{L} \geq 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $2K^2L^2\cos^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}$.
Riassumendo, per $0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{a}{L} > \sqrt{2}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{2}{3}ML^2, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}ML\sin\theta = -\frac{1}{2}Ma.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K, \qquad U_{\theta\theta} = 2KL^2, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -Ka.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$2\left(\frac{K}{M} - \omega^2\right)\left(\frac{K}{M} - \frac{1}{3}\omega^2\right) - \left(\frac{a}{L}\right)^2\left(\frac{K}{M} - \frac{1}{2}\omega^2\right)^2 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$5\,\omega^4 - 20\,\omega^2 + 12 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{10}}{5}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 3.265,\ \omega_-^2 = 0.735.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.807$ e $\omega_- = 0.857$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q e P come funzioni di q e p otteniamo:

$$\begin{aligned} Q &= 2\,e^{\alpha q}\,p^\gamma, \\ P &= \frac{1}{6}\,e^{\beta q}\,p^{1/2}. \end{aligned}$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene $\alpha = -\beta = 3$ e $\gamma = \frac{1}{2}$. Sappiamo che

$$dF_2(q, P) = p\,dq + Q\,dP.$$

Per ottenere $F_2(q, P)$ bisogna quindi esprimere p e Q come funzioni di q e P. Otteniamo:

$$\begin{aligned} p &= 36\,e^{6q}\,P^2, \\ Q &= 12\,P\,e^{6q}, \end{aligned}$$

ed integrando $p\,dq$ o, alternativamente, $Q\,dP$ otteniamo

$$F_2(q,P) = 6\,e^{6q}\,P^2.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
La separazione tra i due eventi è

$$\Delta E = (\alpha, 0, \alpha - 1, 0)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale è

$$\Delta E^2 = \alpha^2 - (\alpha-1)^2 = 2\alpha - 1\,.$$

1. Esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono contemporanei se $\Delta E^2 < 0$ ovvero $\alpha < \frac{1}{2}$. La trasformazione di coordinate tra questo riferimento e quello di partenza è la trasformazione di Lorentz speciale con $\vec{v} = (0, \beta c, 0)$, tale che

   $$\Delta E_0' = \gamma(\Delta E_0 - \beta \Delta E_2) = \gamma(\alpha - \beta(\alpha - 1)) = 0$$

   ovvero
   $$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\,.$$

2. Esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nella stessa posizione se $\Delta E^2 > 0$ ovvero $\alpha > \frac{1}{2}$. La trasformazione di coordinate tra questo riferimento e quello di partenza è la trasformazione di Lorentz speciale con $\vec{v} = (0, \beta c, 0)$, tale che

   $$\Delta E_2' = \gamma(\Delta E_2 - \beta \Delta E_0) = \gamma(\alpha - 1 - \beta\alpha) = 0$$

   ovvero
   $$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\,.$$

3. Se $\alpha = 2$, per
   $$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{1}{2}$$
   gli eventi avvengono nella stessa posizione, con separazione temporale

   $$\Delta E_0' = \gamma(\Delta E_0 - \beta \Delta E_2) = \gamma(\alpha - \beta(\alpha - 1)) = 0\,.$$

   Essendo $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = 2/\sqrt{3}$, $\Delta E_0' = \frac{2}{\sqrt{3}}(2 - 1/2) = \sqrt{3}$. A questo risultato si arrivava anche osservando che nel riferimento in cui $\Delta E_2' = 0$, $\Delta E_0' = \sqrt{\Delta E^2} = \sqrt{2\alpha - 1} = \sqrt{3}$.