Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 16 gennaio 2019

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Si risolvano gli esercizi **1**,**2**,**3** e un esercizio a scelta tra **4a** e **4b**.

1. Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$Q = \frac{1}{\gamma}\, q^{\beta} \ln p$$
$$P = q\, p^{\alpha}$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F_4(p, P)$.

2. Trasformazioni di Lorentz. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati due eventi E_1, E_2 di coordinate, nel riferimento dato,

$$E_1 = (-1, 1, 1, 3) \qquad E_2 = (4, 1, 1, -1)\,.$$

1. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
2. Determinare la separazione temporale $c\Delta t'$ tra gli eventi E_1, E_2 nel nuovo riferimento.

3. Cinematica relativistica. Dopo aver sincronizzato gli orologi, due astronauti (A e B) partono da terra, muovendosi lungo l'asse x in versi opposti; l'astronave di A ha una velocità di modulo $c/2$, l'astronave di B ha una velocità di modulo $c/3$. Ognuno dei due astronauti, quando il proprio orologio indica che è trascorso un tempo $\tau_0 = 1$ anno dalla partenza, inverte istantaneamente il verso del proprio moto, tornando a terra. Qual è la differenza tra i tempi di arrivo T_A e T_B dei due astronauti, misurata da un orologio rimasto in quiete a terra?

4a. Dinamica relativistica. Una particella relativistica di massa propria m è vincolata a muoversi lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa la cui energia potenziale è $V(x) = A\,x$, con $A > 0$. Ad un certo istante, la particella transita per l'origine con velocità $v_0 > 0$. Si determini l'ascissa massima x_M raggiunta dalla particella in funzione di v_0; si determini quindi v_0, sapendo che $A\,x_M = \frac{1}{4}mc^2$.

4b. Urti. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo $m_1 = \frac{27}{20}m$ si muove lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{4}{5}c$ ed urta una particella di massa $m_2 = \frac{3}{4}m$ a riposo nell'origine del sistema di coordinate. Nell'urto viene prodotta un'unica particella di massa M e velocità V. Determinare M e V assumendo assegnata m.

Soluzioni della prova in itinere di MAR del 16 gennaio 2019

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Trasformazioni canoniche. Per fissare i parametri α, β, γ imponiamo la condizione:

$$[Q,P]_{q,p} = 1 = \frac{\beta\alpha}{\gamma} q^\beta p^{\alpha-1} \ln p - \frac{1}{\gamma} p^{\alpha-1} q^\beta$$

dalla quale segue che $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$. la trasformazione canonica risulta quindi essere:

$$\begin{aligned} Q &= -\ln p \\ P &= q\,p \end{aligned}$$

Il differenziale $dF_4(p,P) = -q\,dp + Q\,dP$ ci dice che F_4 si ottiene integrando $-q\,dp$ a P fissato o $Q\,dP$ a p fissato, considerando $q = q(p,P)$ e $Q = Q(p,P)$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} F_4(p,P) &= -\int \frac{P}{p} dp = -P \ln p \\ F_4(p,P) &= -\int \ln p\, dP = -P \ln p \end{aligned}$$

2. Trasformazioni di Lorentz. La separazione tra gli eventi E_1, E_2 è il quadrivettore

$$\underline{E_1 E_2} = (5, 0, 0, -4)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale tra gli eventi è la norma

$$|\underline{E_1 E_2}|^2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

quindi la separazione è di tipo tempo, ed esiste un riferimento inerziale in cui gli eventi avvengono nella stessa posizione.

Nel riferimento di partenza $c\Delta t = 5$, $\Delta z = -4$, mentre $\Delta x = \Delta y = 0$, quindi il riferimento cercato è in moto lungo l'asse z rispetto a quello di partenza, e le sue coordinate si ottengono con una trasformazione di Lorentz speciale

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} z\right) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z - vt) \end{aligned}$$

con $\vec{v} = (0,0,v)$ velocità del nuovo riferimento rispetto al vecchio, e $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$. Nel nuovo riferimento i due eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione, quindi

$$\Delta z' = \gamma\left(\Delta z - \frac{v}{c} c\Delta t\right) = 0 \;\Rightarrow\; \Delta z - \frac{v}{c} c\Delta t = -4 - \frac{v}{c} 5 = 0$$

quindi

$$v = -\frac{4}{5} c \qquad \gamma = \left(1 - \frac{16}{25}\right)^{-1/2} = \frac{5}{3}\,.$$

La separazione temporale nel nuovo riferimento è

$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta z\right) = \frac{5}{3}\left[5 - (-4/5)(-4)\right] = 3\,.$$

3. Cinematica Relativistica. Prendiamo come origine dei tempi propri e coordinati l'evento O di partenza degli astronauti da terra. Quando l'astronauta A inverte il proprio moto, il suo tempo proprio è τ_0 mentre il tempo coordinato è

$$t_A = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2\tau_0}{\sqrt{3}}\,.$$

Quando l'astronauta B inverte il proprio moto, il suo tempo proprio è τ_0 mentre il tempo coordinato è

$$t_B = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}} = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{3\tau_0}{2\sqrt{2}}\,.$$

Il ritorno a terra dell'astronauta A avviene al tempo coordinato (che è anche il tempo misurato da un orologio rimasto a terra) $T_A = 2t_A$, mentre il ritorno a terra dell'astronauta B avviene al tempo coordinato $T_B = 2t_B$. La differenza tra questi due tempi è

$$T_A - T_B = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\tau_0 = 0.188\,\tau_0 = 0.188 \text{ anni}\,.$$

4a. Dinamica relativistica. L'ascissa in questione è quella del punto di inversione del moto. Per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = A\,x_M + mc^2 \qquad \Rightarrow \qquad x_M = \frac{mc^2}{A}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Per la condizione posta dal problema

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{5}{4} \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \frac{3}{5}c.$$

4b. Urti. Il fattore γ_1 della particella 1 risulta essere $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$. I due quadrimpulsi risultano quindi:

$$\begin{aligned} p_1 &= (\frac{5}{3}\times\frac{27}{20}\,mc, \frac{4}{5}\times\frac{5}{3}\times\frac{27}{20}\,mc, 0, 0) = (\frac{9}{4}\,mc, \frac{9}{5}\,mc, 0, 0) \\ p_2 &= (\frac{3}{4}\,mc, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

e per la legge di conservazione del quadrimpulso:

$$p_1 + p_2 = (3\,mc, \frac{9}{5}\,mc, 0, 0) = (\Gamma Mc, \Gamma MV, 0, 0)$$

dalla quale si ottiene:

$$\begin{aligned} \Gamma M &= 3m \\ \Gamma M\frac{V}{c} &= \frac{9}{5}m \end{aligned}$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned} \frac{V}{c} &= \frac{3}{5}, \\ \Gamma &= \frac{5}{4}, \\ M &= \frac{12}{5}m. \end{aligned}$$