

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 7 novembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , si muove una guida circolare, rigida e omogenea, di centro G , massa M e raggio R . Lungo un diametro della guida è saldata una barra AB , rigida e omogenea, di massa m e lunghezza $L = 2R$. Il punto C della barra, che dista $d = \frac{R}{2}$ dall'estremo A , è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox . Il sistema è libero di ruotare rigidamente attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy , passante per C , ed è soggetto alle due forze attive $\underline{F}_a = -K H_a \underline{A}$ e $\underline{F}_b = -K H_b \underline{B}$, con $K > 0$, dove H_a è la proiezione ortogonale di A sulla retta $x = -\gamma$ e H_b è la proiezione ortogonale di B sulla retta $x = \gamma$, con $\gamma > 0$.

Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che la barra AB forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).

1. Si scrivano la funzione di Lagrange \mathcal{L} del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\frac{\gamma}{R} \in (0, +\infty)$.
3. Ponendo ora $\gamma = \frac{2}{3}$, $R = 1$, $M = 3$, $m = 1$, $K = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia del sistema rispetto al suo centro di massa G è $I_G = (M + \frac{m}{3}) R^2$.

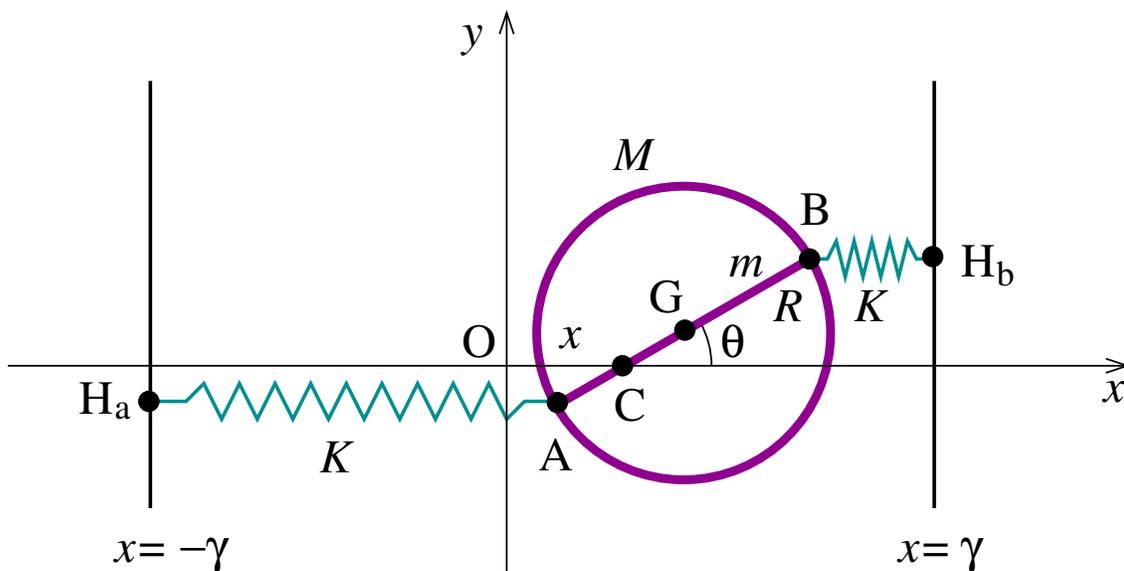


Fig. 1

Soluzione della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 11 novembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Si ha $x_G = x + \frac{R}{2} \cos \theta$, $y_G = \frac{R}{2} \sin \theta$, $x_A = x - \frac{R}{2} \cos \theta$, $x_B = x + \frac{3R}{2} \cos \theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[(M+m)\dot{x}^2 + \left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m \right) R^2 \dot{\theta}^2 - (M+m)R \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} \right].$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K [(x_A - x_{H_a})^2 + (x_B - x_{H_b})^2] = \frac{1}{2}K \left(x - \frac{R}{2} \cos \theta + \gamma \right)^2 + \frac{1}{2}K \left(x + \frac{3R}{2} \cos \theta - \gamma \right)^2.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$(M+m) \left(\ddot{x} - \frac{R}{2} \sin \theta \ddot{\theta} - \frac{R}{2} \cos \theta \dot{\theta}^2 \right) = -K(2x + R \cos \theta),$$

$$\left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m \right) R^2 \ddot{\theta} - \frac{M+m}{2} R \sin \theta \ddot{x} = \frac{KR}{2} \sin \theta (2x + 5R \cos \theta - 4\gamma).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K(2x + R \cos \theta), \quad \partial_\theta U = \frac{KR}{2} \sin \theta (4\gamma - 2x - 5R \cos \theta).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -\frac{R}{2} \cos \theta, \quad (2x + 5R \cos \theta - 4\gamma) \sin \theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\sin \theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ e $x_1 = -\frac{R}{2}$.

La seconda posizione di equilibrio è $\sin \theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $x_2 = \frac{R}{2}$.

Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin \theta \neq 0$, $\cos \theta_{3,4} = \frac{\gamma}{R}$, $\sin \theta_3 > 0$ e $\sin \theta_4 < 0$, e $x_{3,4} = -\frac{\gamma}{2}$. Poiché la traccia assegna $\gamma > 0$, queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{\gamma}{R} \leq 1.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial_{xx}^2 U = 2K, \quad \partial_{\theta\theta}^2 U = \frac{KR}{2} [(4\gamma - 2x - 5R \cos \theta) \cos \theta + 5R \sin^2 \theta], \quad \partial_{x\theta}^2 U = \partial_{\theta x}^2 U = -KR \sin \theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $4K^2R(\gamma - R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\frac{\gamma}{R} > 1$.

L'hessiano nella seconda posizione vale $-4K^2R(\gamma + R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ si ha che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\frac{\gamma}{R} \geq 0$.

Nelle posizioni 3, 4 l'hessiano $4K^2R^2 \sin^2 \theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 < \frac{\gamma}{R} \leq 1$.

Riassumendo, per $0 \leq \frac{\gamma}{R} \leq 1$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{\gamma}{R} > 1$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.

3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M+m = 4, \quad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m \right) R^2 = \frac{13}{3}, \quad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -\frac{R}{2}(M+m) \sin \theta = -2 \sin \theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = 2K = 2, \quad U_{\theta\theta} = \frac{5}{2}KR^2 \sin^2 \theta = \frac{5}{2} \sin^2 \theta, \quad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -KR \sin \theta = -\sin \theta.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$(2 - 4\omega^2) \left(\frac{5}{2} \sin^2 \theta - \frac{13}{3} \omega^2 \right) - (1 - 2\omega^2)^2 \sin^2 \theta = 0,$$

dove $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{\gamma^2}{R^2} = \frac{5}{9}$ nelle posizioni di equilibrio 3,4. Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$34\omega^4 - 27\omega^2 + 5 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{27 \pm 7}{68} \quad \Rightarrow \quad \omega_+^2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_-^2 = \frac{5}{17}.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$ e $\omega_- = \sqrt{\frac{5}{17}} \approx 0.542$.