

Effetti introdotti alla scala di Planck nei modelli T.O.V. e Chandrasekhar

Niccolò Loret

relatore Giovanni Amelino Camelia

20 febbraio 2009

*Una sola cosa riempie l'animo di ammirazione
e venerazione sempre nuova e crescente,
quanto più spesso e più a lungo la riflessione
si occupa di essa: il cielo stellato sopra di me.
Poichè la legge morale non formula previsioni falsificabili.*

Indice

Introduzione	6
1 Il modello di Chandrasekhar	14
ed il modello Tolman-Oppenheimer-Volkoff	14
1.1 Le nane bianche.	15
1.2 Il modello di Chandrasekhar	16
1.3 Il modello di Landau	21
1.4 Il modello TOV	22
2 Alcuni scenari di deformazione di simmetria	30
per teorie con spazio-tempo quantizzato	30
2.1 Deformazioni di simmetrie spazio-temporali e teorie DSR . . .	31
2.2 Modello DSR1	32
2.2.1 Noncommutatività delle coordinate	33
2.2.2 Le mappe di Weyl	33
2.2.3 Generatori di trasformazioni di simmetria	35
2.2.4 Il Casimir di massa	36
2.3 Modello DSR2	38
2.4 Modello DSR3	39
3 Proposte di una possibile deformazione planckiana	44
della meccanica statistica.	44
3.1 Le algebre di Hopf	45
3.2 Regole di somma non abelliane per i momenti	48
e misura d'integrazione.	48
3.3 La relazione di dispersione	53

3.4	conseguenze fisiche per l'impulso di Fermi.	55
4	Modifiche ai modelli di Chandrasekhar e T.O.V.	62
4.1	Modifiche al modello di Chandrasekhar	62
4.1.1	Confronto con analisi precedenti e dati sperimentali . .	74
4.2	Modifiche al modello Tolman-Oppenheimer-Volkoff.	77
	Conclusioni	88
	Bibliografia	92

Introduzione

All'inizio del secolo XX Lord Kelvin, in un suo celeberrimo discorso alla Royal Society [1] paragonò l'orizzonte della fisica ad un azzurro e sconfinato cielo che solamente due piccole nuvolette oscuravano: l'invarianza della velocità della luce e la divergenza teorica della radiazione di corpo nero.

Quelle due nuvolette diedero origine ad una tempesta che sconvolse la fisica classica, dalla quale nacquero due teorie scientifiche dalla portata rivoluzionaria: la relatività generale e la meccanica quantistica. La prima offre una descrizione dei processi gravitazionali, in termini di una dinamica della geometria dello spazio-tempo; la seconda descrive le proprietà delle particelle in un dato spazio-tempo, comprese le loro interazioni (elettromagnetiche, deboli e forti), che sono formalizzate secondo le regole della teoria dei campi quantistici. Le due teorie sono state messe alla prova da numerosi esperimenti ed entrambe hanno mostrato predizioni in eccellente accordo con i risultati sperimentali.

Ma una nuova nuvoletta si affaccia sull'azzurro cielo di queste due teorie ed è l'apparente inconciliabilità che esse mostrano in contesti in cui entrambe giochino un ruolo non trascurabile. Se si cerca, infatti, di applicare assieme la relatività generale e la meccanica quantistica all'analisi di tali contesti, si va incontro ad inconsistenze logiche e matematiche, ancora prima di ottenere predizioni numeriche. Dette inconsistenze sorgono a scale di lunghezza dell'ordine della lunghezza di Planck:

$$L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6 \cdot 10^{-35} m,$$

o, equivalentemente alla corrispondente scala di energia, detta scala di Planck:

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1,22 \cdot 10^{28} eV.$$

A scale di lunghezza maggiori di L_p , infatti, gli effetti gravitazionali sono sempre trascurabili per le particelle elementari, ma a partire da L_p in poi, ci si aspetta che le interazioni gravitazionali tra particelle non siano più trascurabili. A queste piccole scale di lunghezza, quindi, sarà necessario utilizzare una teoria, la *gravità quantistica*, che renda compatibili la descrizione dei fenomeni gravitazionali con il modello standard.

Questo lavoro di tesi si colloca nell'ambito degli approcci alla gravità quantistica basati sull'idea che la lunghezza di Planck possa regolare una noncommutatività della geometria dello spazio-tempo. In particolare, nel limite in cui lo spazio-tempo a livello classico sarebbe descritto dalla geometria classica di Minkowski, si postula l'esistenza di coordinate spazio-temporali che soddisfino regole di commutazione non banali. Un aspetto della noncommutatività spazio-temporale che ha generato particolare interesse è quello delle sue implicazioni per le simmetrie spazio-temporali, per la descrizione delle quali spesso risulta necessario far ricorso ad algebre di Hopf, piuttosto che le usuali algebre di Lie.

Alla luce di queste di queste indicazioni che emergono da alcuni approcci allo studio della gravità quantistica, sarebbe chiaramente importante individuare sperimentalmente delle anomalie riconducibili a nuove proprietà dello spazio-tempo alla lunghezza di Planck. Proprio a causa del piccolissimo valore di L_p , gli effetti predetti sono molto piccoli e quindi difficili da studiare sperimentalmente, ma studi recenti [2, 3, 4, 5, 6] hanno fornito motivi di cauto ottimismo per la fenomenologia alla scala di Planck. Questi studi hanno posto l'attenzione sul fatto che alcuni esperimenti in fase di realizzazione stanno raggiungendo una sensibilità tale da far sperare di poter osservare alcuni effetti di gravità quantistica; in particolare alcuni effetti che, grazie a qualche meccanismo di amplificazione, lasciano un segno fino ad energie più basse, anche di diversi ordini di grandezza, di quella di Planck. L'idea può essere resa chiara in analogia con quanto è avvenuto negli esperimenti sul

decadimento del protone: alcune teorie di grande unificazione prevedono una vita media per il protone di circa 10^{39} secondi; sarebbe, quindi, impossibile mettere alla prova tale predizione se non ci fosse, invece, la possibilità di tenere sotto osservazione contemporaneamente un numero altissimo di protoni, dell'ordine di 10^{33} , quantità che amplifica, per ovvi motivi statistici, la sensibilità sperimentale al fenomeno.

Negli ultimi dieci anni si è tentato di rivelare effetti planckiani attraverso osservazioni astrofisiche in cui vengono studiate singole particelle prodotte a distanze cosmiche con energie piuttosto elevate (in alcuni casi anche $10^{20}eV$). In questo caso il meccanismo di amplificazione è rappresentato dalle enormi distanze che le particelle in questione devono attraversare per giungere fino a noi, che potrebbero dar luogo ad un accumularsi di effetti indotti da proprietà quantistiche dello spazio-tempo.

Di recente A. Camacho in un articolo [7] ha ipotizzato la possibilità di poter utilizzare per fare della fenomenologia alla scala di Planck oggetti astrofisici macroscopici specificamente nello studio delle nane bianche, così da poter osservare la composizione di innumerevoli effetti microscopici, il che sarebbe molto interessante poichè permetterebbe di osservare conseguenze macroscopiche di minuscole deformazioni alle teorie classiche.

Questo lavoro di tesi andrà a verificare in che misura siano fondate queste speranze ed in generale ad esplorare la questione dell'osservazione macroscopica di microeffetti ad L_p .

Il risultato di questa verifica mostra che la grandezza degli effetti ipotizzati nelle conclusioni dell'articolo [7] sulla base di un'analisi preliminare, risulta essere una grossa sovrastima di quanto effettivamente si trova con un'analisi più dettagliata di effetti planckiani nello studio di nane bianche. L'analisi riportata in questo lavoro di tesi conferma (e rende più rigorosa) l'identificazione di effetti planckiani che risultano essere amplificati a livello macroscopico, ma verrà mostrato che l'amplificazione non è sufficiente a rendere

l'effetto realisticamente osservabile.

L'aver trovato che effettivamente sono plausibili tali effetti macroscopici nel caso delle nane bianche, ha motivato un'ulteriore analisi del caso di una modifica ispirata dalle geometrie non commutative al modello Tolman-Oppenheimer-Volkoff [12], per un gas di fermioni in spazio tempo curvo, applicabile allo studio delle stelle di neutroni. Di nuovo effetti macroscopici sono emersi ma comunque troppo piccoli per una verifica sperimentale. Una più attenta investigazione di questa questione necessaria per conclusioni più robuste, viene, comunque, rimandata a studi che seguiranno questo lavoro di tesi.

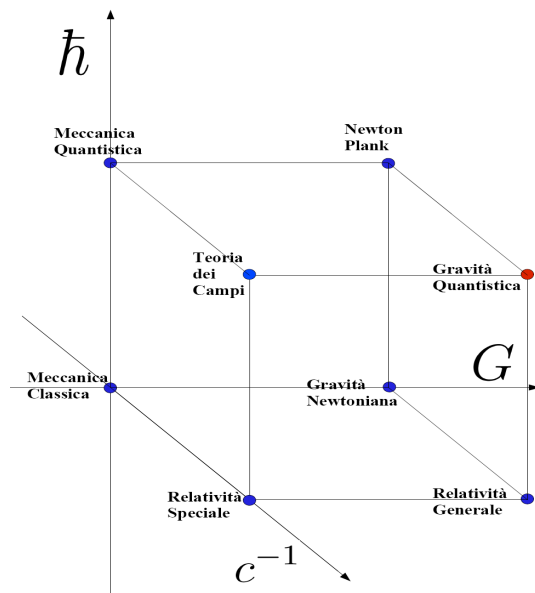


Figura 1: Cubo di Bronshtein-Zelmanov-Okun

Oltre alla possibilità di poter avere manifestazioni macroscopiche di effetti alla scala di Planck, un ulteriore motivo d'interesse per l'analisi qui riportate, risiede nel fatto che lo studio fa riferimento ad un regime fisico quasi del tutto inesplorato, persino dal punto di vista teorico. Per chiarire

questo fatto, è utile mostrare in maniera grafica una sorta di mappa concettuale di teorie fisiche, classificate in base al ruolo che G , c ed \hbar giocano in ognuna di esse. Quest'argomento, per la prima volta evidenziato nel 1928 in un articolo di G. Gamov, D. Ivanenko e L. Landau [8] è oggi noto come cubo Bronstein-Zelmanov-Okun [9, 10]. Si tratta di un cubo individuato da tre assi ortogonali, sui quali vengono segnati i valori di G , c^{-1} e \hbar . Il vertice $(0,0,0)$ corrisponde alla meccanica classica, $(1,0,0)$ alla teoria newtoniana della gravitazione, $(0,1,0)$ alla relatività speciale, $(0,0,1)$ alla meccanica quantistica non relativistica, $(0,1,1)$ alla teoria quantistica dei campi, $(1,1,0)$ alla relatività generale, mentre indicheremo il punto alle coordinate $(1,0,1)$ con il nome di Newton Planck. Il vertice $(1,1,1)$ attende di essere occupato da una teoria quantistica della gravitazione.

Gli attuali approcci al problema della gravità quantistica prendono come punto di partenza ciò che è stato robustamente stabilito per teoria dei campi e relatività generale. Ad esempio la Loop Quantum Gravity è, in breve, un tentativo di generalizzare la lagrangiana di Einstein alla dinamica delle particelle, mediante un approccio di integrali sui cammini di Feynman. Tale teoria, quindi, può essere visualizzato graficamente con un'esplorazione alla gravità quantistica che prenda come punto di partenza il vertice $(1,1,0)$ del cubo, tentando di generalizzare la relatività generale anche a casi in cui \hbar non sia più trascurabile. Allo stesso modo si può pensare che la teoria delle stringhe, che tenta di riformulare il modello standard interpretando le differenti particelle come vibrazioni di enti monodimensionali detti stringhe, sia un tentativo di avvicinarsi alla teoria della gravitazione quantistica, a partire dal vertice $(0,1,1)$. La via che, partendo dal vertice $(1,0,1)$, il quale somma in sé gravità newtoniana e meccanica quantistica non relativistica, tenti di generalizzare questo scenario anche per casi in cui il rapporto tra la velocità delle particelle del sistema e c non sia più trascurabile, è quasi del tutto inesplorata. Questo lavoro di tesi vuole essere un primo studio di

questa strada, a partire da modelli astrofisici costruiti solamente sulla base di meccanica statistica e gravità newtoniana, come, a d esempio, il modello di Chandrasekhar per le nane bianche, studiati in condizioni di compressione estrema.

La formalizzazione dell'introduzione di effetti planckiani nel vertice $(1,0,1)$ proposta in questo lavoro di tesi è senz'altro da ritenersi meramente esplorativa, essendo limitata all'introduzione semieuristica di effetti emersi nella letteratura di geometrie non commutative. Ciò nonostante le indicazioni che ne emergono, sebbene forse affidabili solo a livello qualitativo, paiono fornire motivazioni sufficienti per studi ulteriori e più robuste formulazioni dell'approccio qui proposto.

Nel primo capitolo verranno introdotti i modelli astrofisici, su cui si andrà ad indagare nel quarto capitolo, in particolare il modello di Chandrasekhar per le nane bianche, il modello di Landau per un gas di fermioni sottoposti ad un potenziale newtoniano ed il modello Tolman-Oppenheimer-Volkoff per le stelle di neutroni.

Nel secondo capitolo verranno descritte le caratteristiche più significative di alcuni scenari per la deformazione delle simmetrie spazio-temporali che sono stati studiati in relazione ad alcuni modelli di quantizzazione dello spazio-tempo.

Nel terzo capitolo verranno riportati i risultati della prima fase originale di studio di questo lavoro di tesi, che concerne una nuova formulazione delle implicazioni delle deformazioni delle simmetrie spazio-temporali per alcune proprietà di un gas di fermioni.

Nel quarto capitolo si propongono delle modifiche ai modelli di Chandrasekhar e T.O.V. basate sui risultati riportati nel capitolo tre e se ne discuteranno principalmente le conseguenze che si manifestano a livello macroscopico.

Capitolo 1

Il modello di Chandrasekhar ed il modello Tolman-Oppenheimer-Volkoff

In questo capitolo si darà una breve introduzione ai modelli astrofisici per cui proporremo, nel capitolo quattro, delle modifiche ispirate da alcuni scenari di quantizzazione dello spazio-tempo.

Particolare attenzione verrà prestata al modello di Chandrasekhar [14, 15] ed alle nane bianche, in quanto questo lavoro di tesi prende spunto da alcune speculazioni riportate nell'articolo [7], in cui si ipotizzava la possibilità di osservare effetti introdotti alla scala di Planck nello studio di tali oggetti. Oltre al modello di Chandrasekhar, verrà descritto anche il modello di Tolman-Oppenheimer-Volkoff, infatti proprio gli esiti dell'analisi di effetti planckiani nel caso delle nane bianche, fornirà una motivazione ad estendere gli studi riportati nel capitolo quattro anche al modello T.O.V..

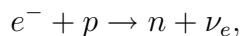
1.1 Le nane bianche.

Le nane bianche sono la fase finale dell'evoluzione stellare per stelle di massa inferiore ad $8M_{\odot}$ [13].

Nel momento in cui la stella si raffredda e si contrae, le funzioni d'onda elettroniche cominciano a sovrapporsi apprezzabilmente. Man mano che la stella si contrae ulteriormente, gli elettroni sono forzati in stati di momento sempre più elevati per soddisfare il principio d'esclusione di Pauli, formando un gas di elettroni con energia di Fermi relativistica e, poichè l'energia termica è tanto più bassa dell'energia di Fermi, è possibile approssimare a zero la temperatura del gas, descrivendo il sistema come gas degenere.

Il limite di massa di Chandrasekhar, circa $1,4M_{\odot}$ per le nane bianche, si ottiene nel momento in cui l'attrazione gravitazionale dovuta ai nuclei è bilanciata dalla pressione del gas di elettroni (in dettaglio nel prossimo paragrafo). Questo limite di massa è ottenuto, per un gas di Fermi ultrarelativistico, quando $\frac{E}{m_f} \sim \frac{p_F}{m_f} \sim 10^4$ (in cui m_f è la massa del fermione e p_F l'impulso di Fermi del sistema), con una densità superiore a $\rho \sim 10^6 g/cm^3$. Il limite di Chandrasekhar, quindi, è il risultato della combinazione degli effetti della gravitazione newtoniana¹ e della meccanica statistica.

Il limite di Chandrasekhar è di grande interesse teorico, ma altri fenomeni fisici entrano in gioco ad alte densità, introducendo processi noti come instabilità dinamiche: a seconda dei dettagli della composizione della stella, due processi rivoluzionano la fisica del sistema, a densità di $\rho \sim 10^9 \div 10^{11} g/cm^3$, gli elettroni acquisiscono energia sufficiente da indurre decadimenti β^- inversi, del tipo:



¹Il potenziale gravitazionale sulla superficie della stella, infatti, non può essere più grande di circa m_e/m_p , per cui il ruolo che la relatività generale gioca nella struttura può essere tranquillamente trascurato.

e la stella diviene una stella di neutroni, in un processo chiamato neutronizzazione; al di sopra di una determinata massa (all'incirca $M \sim 2 \div 3M_\odot$), invece, l'attrazione gravitazionale diviene troppo intensa da non poter essere compensata neanche dal passaggio di stato della materia verso la stella di neutroni, quindi, superata densità critica di $\rho \sim 10^{10}g/cm^3$, effetti general-relativistici causano il collasso gravitazionale.

Le densità di soglia appena citate dipendono dalla composizione della stella, ad esempio per una nana ferrosa è irrilevante l'instabilità general-relativistica, poichè neutronizza prima del collasso gravitazionale, mentre per nane di elio e carbonio la situazione è inversa e le instabilità dovute alla relatività generale divengono dominanti prima della neutronizzazione.

In generale le nane bianche sono sistemi fisici che debbono la propria stabilità alla repulsione tra gli elettroni dei diversi atomi, dovuta al principio di esclusione di Pauli, rappresentano, dunque, un lampante esempio di manifestazione macroscopica di effetti quantistici. Per questo motivo, esse potrebbero essere il terreno ideale per testare deformazioni della teoria alla scala di Planck. Tali deformazioni, però, sono, come vedremo, proporzionali ad una certa potenza dell'impulso di Fermi del sistema, che, purtroppo, non è ancora abbastanza consistente da fornire conseguenze osservabili [18].

1.2 Il modello di Chandrasekhar

L'analisi di Chandrasekhar si basa sulla definizione di pressione:

$$P_0 = -\frac{\partial E_0}{\partial V}, \quad (1.1)$$

in cui l'energia E_0 dello stato fondamentale del gas di Fermi è definita come:

$$E_0 = \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_F} dp 4\pi p^2 \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2}, \quad (1.2)$$

dove p_F è l'impulso di Fermi definito come raggio della sfera di Fermi nello spazio delle fasi, ovvero:

$$p_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} \quad (1.3)$$

Cambiando la variabile di integrazione nella (1.2) in $x = p/m_e c$, si ottiene:

$$E_0 = \frac{m_e^4 c^5 V}{\pi^2 \hbar^3} f(x_F) \quad (1.4)$$

con

$$\begin{aligned} f(x_F) &= \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2} = \\ &= \frac{x_F}{4} (x_F^2 + 1)^{3/2} - \frac{x_F}{8} \sqrt{x_F^2 + 1} - \frac{1}{8} \ln \left(x_F + \sqrt{x_F^2 + 1} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Conoscendo la formula per l'energia dello stato fondamentale è ora possibile derivare la pressione che il gas esercita verso l'esterno:

$$P_0 = -\frac{\partial E_0}{\partial V} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{3} x_F^3 \sqrt{1+x_F^2} - f(x_F) \right). \quad (1.6)$$

La condizione di equilibrio della stella si ottiene ponendo la pressione del gas uguale alla pressione ottenuta a partire dal potenziale newtoniano.

La quantità di lavoro che un agente esterno deve compiere per comprimere la stella di massa assegnata da uno stato infinitamente diluito ad uno stato di densità finita è data da:

$$- \int_{\infty}^R P_0 4\pi r^2 dr$$

dove P_0 è la pressione di un gas di Fermi uniforme e R è il raggio della stella. Ragionando da un punto di vista classico, se R è il raggio di equilibrio della

stella, il lavoro compiuto per mettere assieme il gas deve essere compensato dall'autoenergia gravitazionale, quindi:

$$\int_{\infty}^R P_0 4\pi r^2 dr = -\frac{GM^2}{R}$$

Differenziando rispetto ad R , si ottiene la seguente condizione d'equilibrio:

$$P_0 = \frac{G}{4\pi} \left(\frac{8m_P}{9\pi}\right)^2 \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^4 \frac{\left(M \frac{9\pi}{8m_P}\right)^2}{\left(R \frac{m_e c}{\hbar}\right)^4}, \quad (1.7)$$

in cui m_e è la massa dell'elettrone e m_P è la massa del protone.

Da qui in avanti, per semplicità, verrà adottata la seguente scrittura:

$$\bar{M} = \frac{9\pi}{8m_P} M \quad (1.8)$$

$$\bar{R} = \frac{R}{\hbar/m_e c}. \quad (1.9)$$

Il comportamento del sistema, nei regimi non relativistico ed ultrarelativistico, si ottiene uguagliando la (1.6) e la (1.7) approssimando rispettivamente $x_F \ll 1$ e $x_F \gg 1$.

La (1.6) nei due casi dà:

$$P_0 \approx \left(\frac{m_e^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3}\right) x_F^5 \quad (x_F \ll 1) \quad (1.10)$$

$$P_0 \approx \left(\frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3}\right) (x_F^4 - x_F^2) \quad (x_F \gg 1). \quad (1.11)$$

Per ottenere informazioni sulle caratteristiche macroscopiche del sistema, è necessario tener presenti le relazioni:

$$M \simeq 2m_P N \quad (1.12)$$

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.13)$$

Quindi, sfruttando la definizione dell'impulso di fermi $p_F = \hbar(3\pi^2 \frac{N}{V})^{\frac{1}{3}}$, si risale a:

$$\begin{aligned} x_F &\equiv \frac{p_F}{m_e c} = \frac{\hbar}{m_e c} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\hbar}{m_e c} \frac{1}{\bar{R}} \left(\frac{9\pi}{8} \frac{M}{m_P} \right)^{\frac{1}{3}} \equiv \\ &\equiv \frac{\bar{M}^{\frac{1}{3}}}{\bar{R}}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

in cui è bene notare che \bar{R} ed \bar{M} sono due grandezze adimensionali.

A questo punto è possibile derivare l'andamento del raggio in funzione della massa per i regimi $x_F \ll 1$ e $x_F \gg 1$.

Nel regime non relativistico, uguagliando la (1.7) e la (1.10) si ha:

$$\bar{R} = \frac{4}{5} \frac{K}{K'} \bar{M}^{-\frac{1}{3}}, \quad (1.15)$$

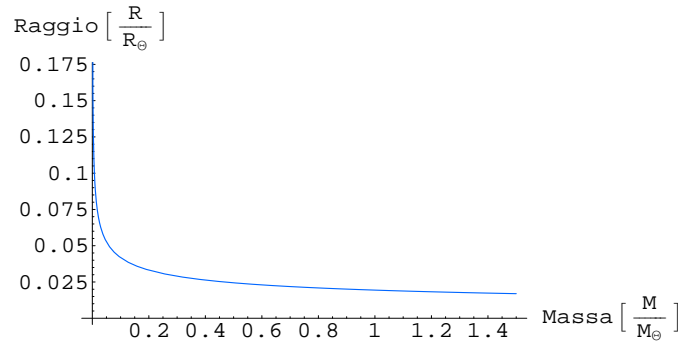


Figura 1.1: Curva non relativistica dell'andamento raggio-massa, sull'asse delle ordinate sono riportati i valori del raggio in unità di raggi solari, mentre sull'asse delle ascisse la massa in masse solari.

in cui

$$K = \left(\frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \right)$$

e

$$K' = \frac{G}{4\pi} \left(\frac{8m_P}{9\pi} \right)^2 \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^4 .$$

Nel regime ultrarelativistico invece uguagliando la (1.7) e la (1.11) si ottiene che il raggio in funzione della massa è dato da:

$$\bar{R} = \bar{M}^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_0} \right)^{\frac{2}{3}}} , \quad (1.16)$$

in cui:

$$\bar{M}_0 = \left(\frac{K}{K'} \right)^{\frac{3}{2}} .$$

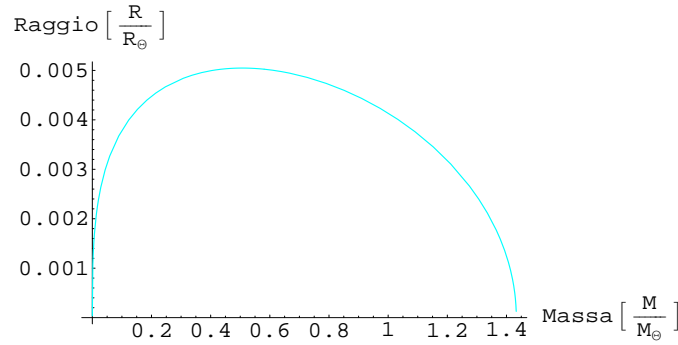


Figura 1.2: Curva ultrarelativistica dell'andamento raggio-massa, sull'asse delle ordinate sono riportati i valori del raggio in unità di raggi solari, mentre sull'asse delle ascisse la massa in masse solari.

La formula (1.16) è valida per alte densità, ovvero per $R \rightarrow 0$ e $M \rightarrow M_0$. Questo modello dà luogo alla notevole predizione secondo la quale non ci può essere una nana bianca con massa superiore a M_0 , poichè, altrimenti, il raggio della stella diverrebbe immaginario. M_0 è detto limite di Chandrasekhar e vale come accennato:

$$M_0 \simeq 1,4M_{\odot}$$

1.3 Il modello di Landau

Un argomento molto semplice per trattare la stabilità di un gas di fermioni autogravitanti, che utilizzi solamente la gravità newtoniana e la statistica di Fermi-Dirac, fu presentato da Landau [16, 17] per immaginare la massa di un ipotetico oggetto astrofisico composto solamente da neutroni.

Questo modello prende in considerazione un fermione sulla superficie della stella la cui energia nel regime non relativistico, in unità $c = \hbar = 1$, sarà data da:

$$E(R) = -G \frac{M m_f}{R} + \frac{p_F^2}{2m_f} = -G \frac{N m_f^2}{R} + \frac{1}{2m_f} (3\pi^2 N)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{R^2} \quad (1.17)$$

in cui si è sostituito a p_F il suo valore per fermioni di spin $\frac{1}{2}$:

$$p_F = (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \frac{N^{\frac{1}{3}}}{R}$$

ed in cui si è ipotizzato che l'oggetto in questione sia composto esclusivamente da un solo tipo di particella, e che, quindi la sua massa totale sia esprimibile come:

$$M = m_f N.$$

dalla (1.17) si ottiene che si potrà avere una soluzione positiva per il raggio per ogni valore di N e quindi si avrà stabilità per ogni valore della massa della stella (come nel caso di Chandrasekhar in approssimazione non relativistica). Passando in regime ultrarelativistico, la (1.17) diviene:

$$E(R) = -G \frac{M m_f}{R} + p_F = -G \frac{N m_f^2}{R} + (3\pi^2 N)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{R}. \quad (1.18)$$

In questo caso, invece, si osserva che per piccoli valori di R ed energia negativa, il termine dovuto all'attrazione gravitazionale prevale sul termine dovuto

alla pressione di degenerazione, causando il collasso. Contrariamente, per valori positivi di E il contributo della pressione supererà l'attrazione gravitazionale e la stella si espanderà fino a che la diminuzione della concentrazione non porterà ad avere $p_F \sim m_f$, cioè non si torni al regime non relativistico (1.17), in cui si hanno sempre soluzioni di equilibrio stabile per ogni valore del raggio.

Una buona stima della massa massima di una stella composta esclusivamente di materia fermionica si può ottenere considerando il caso limite $E = 0$, in cui l'energia gravitazionale sia esattamente uguale all'energia di Fermi del gas degenerare. Essa risulta essere:

$$M_{max} \sim \frac{M_p^3}{m_f^2}$$

in cui M_p è la massa di Planck, definita come $M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$.

Una stima per il corrispondente raggio può essere ottenuto assumendo che l'energia cinetica dei fermioni sulla superficie sia uguale alla loro massa, quindi sul punto di divenire relativistici. Il valore minimo del raggio che si ottiene quindi è:

$$R_{min} \sim \frac{M_p}{m_f^2}.$$

A partire da queste formule, sapendo che $m_n \simeq 1\text{GeV}$, Landau fu in grado di calcolare per una stella di neutroni $M_{max} \simeq 1,63M_\odot$ e $R_{min} \simeq 2,41\text{Km}$, che sono stime assolutamente ragionevoli, stando a quanto osservato.

1.4 Il modello TOV

In risposta al modello di Landau, Oppenheimer e Volkoff, osservarono che le ipotesi di partenza del loro collega sovietico non si addicevano alla fisica del sistema [12]. I neutroni, infatti, per via della loro grande massa, alla

densità di $\sim 10^{14}g/cm^3$ (densità alla quale si ha il passaggio di stato a gas di neutroni), non possono essere studiati in approssimazione ultrarelativistica; Landau, inoltre, non aveva preso in considerazione gli effetti della curvatura dello spazio-tempo, infatti il potenziale gravitazionale in superficie si può stimare come $\frac{GM}{R} \sim 1$, essendo il raggio medio delle stelle di neutroni circa 10 km.

Quindi Oppenheimer e Volkoff, proposero un modello in cui venivano inserite le soluzioni esatte per la pressione e la densità di energia di un gas di neutroni, all'interno delle soluzioni delle equazioni di Einstein proposte da Tolmann [11].

Considerando la metrica di Schwarzschild, in unità $c = \hbar = G = 1$, nei parametri ν e λ :

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (1.19)$$

si imposta il sistema:

$$\begin{cases} G_{00} = 8\pi T_{00} \\ G_{ij} = 8\pi T_{ij} \\ G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \end{cases} \quad (1.20)$$

in cui le prime due equazioni sono le equazioni di Einstein e la terza è la loro derivazione covariante.

Caratterizzando il sistema nel caso di un fluido sottoposto a pressione, con tensore energia-impulso:

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho(P))u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho(P) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

in cui P è la pressione e $\rho(P)$ è la densità di energia della stella e u^μ denota la quadrivelocità del fluido, si ottiene:

$$\begin{cases} 8\pi P = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'(r)}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \\ 8\pi\rho(P) = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \\ \frac{dP}{dr} = \frac{P+\rho(P)}{2}\nu'(r) \end{cases} \quad (1.22)$$

in cui l'apostrofo $'$ indica la derivazione rispetto ad r .

Una forma esplicita per $\lambda(r)$ si ottiene a partire dalla metrica (1.19), infatti, dal limite newtoniano:

$$g_{00} = -\left(1 - 2\frac{M}{r}\right) \quad (1.23)$$

in cui M è la massa della stella, deriva:

$$e^{-\lambda(r)} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right),$$

in cui si è espressa $\lambda(r)$ in funzione di $m(r)$. L'interpretazione fisica di $m(r)$, può essere data sempre a partire dalla (1.23), infatti se si assume essere la stella una sfera di raggio R , in cui all'esterno siano valide le soluzioni di Schwarzschild nel vuoto, si osserva che per continuità:

$$m(R) = \frac{R}{2}(1 - e^{-\lambda(R)}) = \frac{R}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)\right) = M. \quad (1.24)$$

L'espressione di $\nu(r)$, invece, si ottiene dalla terza delle (1.22), infatti, integrando da r al raggio della stella R , per continuità, si ha:

$$\int_r^R \nu'(r) dr = \int_{P(r)}^{P(R)} \frac{2}{P + \rho(P)} dP$$

e quindi:

$$e^{\nu(r)} = e^{\nu(R)} e^{-\int_0^P \frac{2}{P+\rho(P)} dP} \quad (1.25)$$

É, dunque, possibile riesprimere le prime due equazioni del sistema (1.22) come le equazioni di Tolman Oppenheimer Volkov:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = 4\pi\rho(P)r^2 \\ \frac{dP}{dr} = -\frac{P+\rho(P)}{r(r-2m)}(4\pi Pr^3 + m(r)) \end{cases} \quad (1.26)$$

Si sostituiscono, poi, a ρ, P le espressioni ottenute per un gas di fermioni:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Q}{32}(\sinh(t) - t) \\ P &= \frac{1}{3} \frac{Q}{32} \left(\sinh(t) - 8 \sinh\left(\frac{t}{2}\right) + 3t \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

in cui $Q = \frac{m_f^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3}$ e t è definito come:

$$t = 4 \ln(x_F + \sqrt{1 + (x_F)^2}) \quad (1.28)$$

e, di conseguenza:

$$p_F = m_f \sinh\left(\frac{t}{4}\right).$$

mediante questa sostituzione, quindi, la (1.29) diviene:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = 4\pi \frac{Q}{32} r^2 (\sinh(t) - t) \\ \frac{dt}{dr} = -\frac{4}{r(r-2m)} \frac{\sinh(t) - 2 \sinh(\frac{t}{2})}{\cosh(t) - 4 \cosh(\frac{t}{2}) + 3} \left(\frac{4}{3} \pi \frac{Q}{32} r^3 (\sinh(t) - 8 \sinh(\frac{t}{2}) + 3t) + m(r) \right) \end{cases} \quad (1.29)$$

Data la loro complessità, non é possibile trovare una soluzione analitica per le (1.29), in letteratura vengono, infatti, risolte in maniera numerica. É, però, possibile risolverle analiticamente nell'aprossimazione ultrarelativistica in cui $t \gg 1$ ed ottenere:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = \frac{1}{2} r^2 e^t \\ \frac{dt}{dr} = -\frac{4}{r(r-2m)} \left(\frac{r^3}{6} e^t + m(r) \right) \end{cases} \quad (1.30)$$

Le unità di lunghezza sono state fissate dalla richiesta: $Q = 32/4\pi$, e sono:

$$l = \frac{1}{\pi} \left(\frac{h}{m_f c} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{c}{(m_f G)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.31)$$

mentre le unità di massa sono:

$$\mu = \frac{c^2}{G} l = \frac{c^2}{G} \frac{1}{\pi} \left(\frac{h}{m_f c} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{c^3}{(m_f G^3)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.32)$$

Per un gas di neutroni $l = 1,36 \cdot 10^4 m$, $\mu = 1,83 \cdot 10^{31} Kg$.

In queste unità di misura, integrando le (1.30) nelle condizioni al contorno: $t(0) = \infty$, $m(0) = 0$ si ottengono le soluzioni analitiche:

$$e^{t(r)} = \frac{3}{7r^2} \quad , \quad m(r) = \frac{3}{14}r. \quad (1.33)$$

Tali soluzioni sono, però, instabili, infatti far tendere $t \rightarrow \infty$ significa studiare il sistema ad impulsi di fermi molto alti che si ottengono comprimendo il sistema, costringendo le funzioni d'onda a sovrapporsi spazialmente ed a passare ad uno stato ad impulso superiore per rispettare il principio d'esclusione di Pauli. Ad alte densità è noto, inoltre, che la pressione interna del sistema non è più in grado di controbilanciare l'attrazione gravitazionale, come mostrato nel precedente paragrafo prendendo in considerazione il semplice modellino di Landau.

Le stelle composte da un fluido perfetto (1.21), quindi, possono passare dalla stabilità all'instabilità rispetto ad ogni moto radiale delle oscillazioni, solo ad un valore della densità d'energia [19], alla quale la massa d'equilibrio è stazionaria:

$$\frac{\partial M(\rho)}{\partial \rho} = 0.$$

A partire da quest'affermazione è possibile definire la condizione necessaria per avere la stabilità:

$$\frac{\partial M(\rho)}{\partial \rho} > 0. \quad (1.34)$$

Tornando, quindi, alle soluzioni (1.33), esplicitando la dipendenza di $m(r)$ rispetto a t :

$$m(t) = \frac{3}{14} \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}},$$

è possibile determinare l'impossibilità di soddisfare la condizione (1.34), infatti, sfruttando:

$$t \sim \ln(2\rho)$$

si esplicita:

$$m(\rho) \simeq \left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \quad (1.35)$$

per cui:

$$\frac{\partial m(\rho)}{\partial \rho} \simeq -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{3}{2}} < 0.$$

Partendo da questo modello quindi Oppenheimer e Volkoff furono in grado di stabilire che non è possibile trovare soluzioni d'equilibrio stabile per un gas di neutroni dopo un certo valore di t , che corrisponde all'incirca ad una massa di $M_{max} \sim 0,8M_{\odot}$.

Capitolo 2

Alcuni scenari di deformazione di simmetria per teorie con spazio-tempo quantizzato

In questo capitolo verrà data una breve introduzione delle teorie relativistiche di tipo DSR (*doubly special relativity*) ed ai tentativi di formulare questa teoria facendo uso della matematica dell'algebra di Hopf detta κ -Poincaré [20, 21, 22, 23, 24, 25].

La motivazione per contemplare queste teorie DSR verrà discussa nel primo paragrafo, relazionandole soprattutto all'idea che attribuendo un ruolo alla lunghezza di Planck nella struttura fondamentale dello spazio-tempo, come suggerito da molti argomenti di gravità quantistica, possa poi essere necessario far riferimento ad una corrispondente deformazione dell'algebra delle simmetrie spazio-temporali (ovvero le leggi di trasformazione tra osservatori).

Questo quadro logico generale verrà poi discusso in modo più esplicito nei paragrafi 2.2, 2.3 e 2.4, in cui si illustrano le caratteristiche principali di tre esempi di tentativi di formulazione di teorie relativistiche di tipo DSR.

L'analisi dei modelli di Chandrasekhar e T.O.V. riportate nel quarto capitolo farà uso di alcuni elementi di questi esempi di teorie DSR.

2.1 Deformazioni di simmetrie spazio-temporali e teorie DSR

Come menzionato nell'introduzione numerosi argomenti di gravità quantistica invitano a contemplare la possibilità di una descrizione fondamentale dello spazio-tempo non formulata come geometria classica e caratterizzata in qualche modo dalla lunghezza di Planck.

Di fatto numerosi studi di teorie con spazio-tempo quantizzato hanno dato luogo a risultati incompatibili con le simmetrie classiche di Poincaré. Già nel corso degli anni '90 [29, 30], sono state riportate in particolare numerose analisi di modelli motivati dallo studio del problema della gravità quantistica in cui si trovano relazioni di dispersione tra energia ed impulso di una particella (in unità $c = \hbar = 1$) del tipo:

$$E^2 - m^2 = |\vec{p}|^2 + f(E, |\vec{p}|^2, \lambda).$$

Inizialmente questi risultati erano stati interpretati assumendo che essi dovessero necessariamente essere una manifestazione di una rottura delle simmetrie spazio-temporali, con associata introduzione di una classe privilegiata di osservatori. È poi emerso che questa assunzione era ingiustificata: è infatti possibile, come osservato originariamente nei lavori [24, 27, 28], senza rompere le simmetrie di Poincaré, salvaguardare l'invarianza della relazione di dispersione, deformando le leggi di trasformazione tra osservatori.

2.2 Modello DSR1

L'idea di avere teorie relativistiche di tipo DSR, quindi con deformazione planckiana delle trasformazioni di simmetria, ma tenendo valido il principio di Relatività (cioè la non esistenza di una classe di osservatori privilegiata), ha generato molto interesse nell'ultimo decennio e numerosi tentativi di formalizzazione matematica sono stati considerati. Il più studiato, talvolta denominato scenario DSR1, si basa sull'adozione di uno spazio-tempo noncommutativo di tipo κ -Minkowski:

$$[x_j, x_0] = i\lambda x_j \quad , \quad [x_j, x_k] = 0 \quad (2.1)$$

dove $j, k = 1, 2, 3$ e λ è un parametro con le dimensioni di una lunghezza (il parametro λ è un parametro fenomenologico, ma è naturale pensare che sia dello stesso ordine di L_P), e l'associata deformazione dell'algebra di simmetrie detta κ -Poincaré. La prima forma di queste trasformazioni deformate era stata formulata [24] come leggi di azione sullo spazio energia-impulso ed aveva delle rotazioni classiche e boost della forma:

$$N_i \simeq ip_i \frac{\partial}{\partial E} + i(E + \frac{\lambda}{2} p^2 - \lambda E^2) \frac{\partial}{\partial p_i} - i\lambda p_i (p_j \frac{\partial}{\partial p_j}).$$

L'espansione a tutti gli ordini di questa teoria al primo ordine, può essere sviluppata a partire dalla *bi-cross-product-basis* dell'algebra di κ -Poincaré, i cui generatori sviluppati al primo ordine in λ restituisce i boost appena mostrati.

Verrà quindi ora dato un rapido sguardo sullo spazio di κ -Minkowski e dell'algebra dei generatori di simmetria ad esso legata, per poi poter continuare il discorso sulla DSR1 e le sue proprietà.

2.2.1 Noncommutatività delle coordinate

Come già esposto precedentemente, una possibile maniera per introdurre il concetto di lunghezza minima misurabile, è basato sul concetto di spazio-tempo non commutativo. In particolare, nel limite in cui lo spazio-tempo a livello classico sarebbe descritto dalla geometria di Minkowski, si postula l'esistenza di coordinate che soddisfino regole di commutazione non banali. Così facendo si formalizza matematicamente la quantizzazione dello spazio-tempo in analogia a quanto fatto in meccanica quantistica non relativistica nel caso di impulso e posizione.

Le formulazioni di spazio tempo non commutativo maggiormente studiate negli ultimi anni, sono tutte comprese all'interno della seguente parametrizzazione delle regole di commutazione tra le coordinate:

$$[x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu} + i\zeta_{\mu\nu}^\alpha x_\alpha.$$

Nel caso in cui si intenda esplorare la possibilità di avere traslazioni non classiche, un modello che presenta già delle immediate e notevoli differenze dal commutativo è quello con $\theta_{\mu\nu} = 0$:

$$[x_\mu, x_\nu] = i\zeta_{\mu\nu}^\alpha x_\alpha,$$

di cui le regole (2.1) dello spazio di κ -Minkowski sono un caso particolare molto studiato in letteratura, a cui si farà riferimento in questo lavoro di tesi.

2.2.2 Le mappe di Weyl

Per creare un'associazione tra le coordinate spaziotemporali non commutative e funzioni in uno spazio ausiliario commutativo, si procede nella seguente maniera: sia $F(\hat{x})$ la funzione che ci si propone di descrivere, e si ponga di

poterla esprimere come:

$$F(\hat{x}) = \int d^4k \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}, \quad (2.2)$$

in cui le variabili di integrazione k_μ siano commutative e $\int d^4k$ sia l'integrale ordinario. Alla funzione $\tilde{f}(k)$ può essere associata la sua corrispondente antitrasformata di Fourier:

$$f(x) = \int d^4k \tilde{f}(k) e^{ik_\mu x^\mu},$$

definita in uno spazio ausiliario di variabili commutative x .

Questa trasposizione di una funzione sullo spazio non commutativo in uno dello spazio commutativo, definisce una mappa detta di Weyl, spesso denotata con il simbolo Ω :

$$F(\hat{x}) = \Omega(f(x)). \quad (2.3)$$

Si noti che l'associazione fatta tra F ed f , dipende dalla base di esponenziali scelta per la (2.2), visto che, ad esempio dalle regole di commutazione (2.1) si ottiene che:

$$e^{ik_j x^j} e^{ik_0 x^0} \neq e^{ik_0 x^0} e^{ik_j x^j}.$$

E', però, è stato stabilito recentemente [40, 39] che nulla di osservabile dipende da questa scelta di ordinamento per la base di esponenziali, e, quindi, in questa tesi viene considerata solo la convenzione tempo a destra, con esponenziali di base $e^{i\vec{k}\vec{x}} e^{ik_0 x_0}$:

$$\Omega_R(e^{ikx}) = e^{i\vec{k}\vec{x}} e^{-ik_0 x_0}. \quad (2.4)$$

2.2.3 Generatori di trasformazioni di simmetria

Come ampiamente stabilito in letteratura, le simmetrie di κ -Minkoski sono caratterizzate da un'algebra di generatori che ammettono una descrizione relativamente semplice usando le mappe di Weyl. In questa paragrafo P_μ sono i generatori delle traslazioni spazio-temporali, M_j i generatori delle rotazioni e N_j i generatori dei boost. Essi agiscono sulla base di espansione (2.4) per i campi non commutativi nella seguente maniera:

$$P_\mu \Omega(e^{ikx}) = k_\mu \Omega(e^{ikx}),$$

$$M_j \Omega(e^{ikx}) = \epsilon_{jkl} x_k k_l \Omega(e^{ikx}),$$

$$N_j \Omega(e^{ikx}) = \Omega\left(\left(x_j \left(\frac{1 - e^{-2\lambda k_0}}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2} k^2\right) - x_0 k_j\right) e^{ikx}\right). \quad (2.5)$$

Le regole di commutazione che valgono fra loro sono:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [M_j, P_0] = 0, \quad [M_j, P_k] = i\epsilon_{jkl} P_l, \quad (2.6)$$

$$[M_j, M_k] = i\epsilon_{jkl} M_l, \quad [M_j, N_k] = i\epsilon_{jkl} N_l, \quad (2.7)$$

$$[N_j, P_k] = i\delta_{jk} \left(\frac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2P_0\lambda}) + \frac{\lambda}{2} \vec{P}^2\right) - i\lambda P_j P_k,$$

$$[N_j, P_0] = iP_j, \quad [N_j, N_k] = -i\epsilon_{jkl} M_l. \quad (2.8)$$

Per il commutatore $[N_j, P_k]$ ¹ è facile verificare che nel limite $\lambda \rightarrow 0$, si riottenrebbe il risultato classico $i\delta_{jk}P_0$, poichè nel limite commutativo i generatori di quest'algebra di simmetrie si riconducono ai consueti generatori dell'algebra di Poincarè.

2.2.4 Il Casimir di massa

Nelle teorie con simmetrie classiche di Poincaré un ruolo importante è interpretato dal primo Casimir, rappresentato dall'operatore

$$\square = P_\mu P^\mu. \quad (2.9)$$

È naturale aspettarsi che il primo casimir \square_λ dell'algebra deformata di simmetria κ -Poincaré caratterizzi significativamente la deformazione. È possibile verificare dalle (2.6), (2.7), (2.8) che il primo casimir deformato è l'operatore:

$$\square_\lambda = \left(\frac{2}{\lambda} \sinh\left(\frac{\lambda P_0}{2}\right) \right)^2 - e^{\lambda P_0} \vec{P}^2. \quad (2.10)$$

Il cui sviluppo al primo ordine in λ è:

$$\square_\lambda \simeq P_0^2 - |\vec{P}|^2(1 + \lambda P_0), \quad (2.11)$$

che in particolare, come ci si dovrebbe aspettare, ridà l'operatore classico \square nel limite $\lambda \rightarrow 0$. Quest'operatore \square_λ , avrà un ruolo centrale nello sviluppo di un modello fenomenologico di questi effetti.

È possibile ora caratterizzare in maniera piuttosto semplice le trasformazioni

¹Il risultato di questo commutatore spicca per la non linearità, proibita per le regole di commutazione nell'algebra di Lie, questo è possibile poichè, come discusso un po' più approfonditamente nel prossimo capitolo, i generatori delle simmetrie in κ -Minkowski non chiudono un'algebra di Lie, bensì un'algebra di Hopf.

di Lorentz deformate [26]. Infatti a partire dai boost (2.5) si ottiene che per due sistemi di riferimento differenti si avrà:

$$E(\xi) = E_0 + \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \sinh(\lambda E_0) e^{-\lambda E_0} (\cosh(\xi) - 1)) \quad (2.12)$$

$$p_z(\xi) = \frac{1}{\lambda} \frac{\sinh(\lambda E_0) e^{-\lambda E_0} \sinh(\xi)}{1 + \sinh(\lambda E_0) e^{-\lambda E_0} (\cosh(\xi) - 1)}, \quad (2.13)$$

in cui il parametro ξ , detto rapidità è introdotto, come al solito come parametro di boost, cioè come coefficiente del boost nell'esponenziale che rappresenta la trasformazione. Per $\lambda > 0$ è possibile par variare la ξ tra $-\infty$ e ∞ senza incontrare singolarità. Per $\xi \rightarrow \pm\infty$ si trova $E \rightarrow \infty$ e $p_z \rightarrow \pm\frac{1}{\lambda}$. Dunque si trova l'esistenza di un momento massimo, mentre nel caso classico sia l'impulso che l'energia divergono per $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Sfruttando il fatto che la rapidità può essere facilmente dedotta invertendo le relazioni(2.12), (2.13):

$$\begin{aligned} \cosh(\xi) &= \frac{e^{\lambda E} - \cosh(\lambda m_0)}{\sinh(\lambda m_0)} \\ \sinh(\xi) &= \frac{\lambda p e^{\lambda E}}{\sinh(\lambda m_0)}, \end{aligned}$$

è anche possibile introdurre delle utili variabili ausiliarie

$$\epsilon_1 = \mu_0 \cosh(\xi) = \frac{e^{\lambda E} - \cosh(\lambda m_0)}{\lambda \cosh(\lambda \frac{m_0}{2})} \quad (2.14)$$

$$\vec{\pi}_1 = \mu_0 \sinh(\xi) = \frac{\vec{p} e^{\lambda E}}{\cosh(\lambda \frac{m_0}{2})}, \quad (2.15)$$

in cui $\mu_0 = \frac{2 \sinh(\lambda \frac{m_0}{2})}{\lambda}$. Con queste nuove variabili sfruttando l'identità $\cosh^2(\xi) - \sinh^2(\xi) = 1$, è possibile riesprimere la relazione di dispersione (2.10) come:

$$\epsilon_1^2 - \vec{\pi}_1^2 = \mu_0^2.$$

Ad esse, inoltre, sono applicabili le stesse regole di commutazione con i boost che energia ed impulso classici hanno nella relatività speciale:

$$[N_j, \pi_{1i}] = \delta_{ij}\epsilon_1 \quad , \quad [N_j, \epsilon] = \pi_{1j} \quad (2.16)$$

in cui gli N_j sono i boost deformati presentati in (2.5).

2.3 Modello DSR2

L'idea di una qualche deformazione delle simmetrie spazio-temporali, e quindi di una deformazione delle leggi di trasformazione tra osservatori, ha attratto nell'ultimo decennio molto interesse, anche come formulazione dell'idea di un impulso massimo, per cui alcuni studiosi del problema della gravità quantistica avevano motivazioni indipendenti di interesse. Come enfatizzato nel paragrafo precedente, il modello DSR1 prevede appunto un impulso massimo, ma va sottolineato che diverse teorie relativistiche di tipo DSR danno luogo a caratterizzazioni anche significativamente diverse. La prima alternativa al modello DSR1 proposta in letteratura è il cosiddetto modello DSR2 [23, 28], in cui non solo l'impulso, ma anche l'energia sono soggetti ad un limite massimo.

La relazione di dispersione che caratterizza il modello DSR2 è:

$$\frac{E^2 - |\vec{p}|^2}{(1 - \lambda E)^2} = m^2. \quad (2.17)$$

Il valore massimo dell'energia è $\frac{1}{\lambda}$, associato alla presenza nella (2.17) di una singolarità per $E = 1/\lambda$.

I generatori delle trasformazioni di boost sotto cui questa relazione di dis-

persione è invariante sono:

$$N_i = i(p_i \frac{\partial}{\partial E} + E \frac{\partial}{\partial p_i}) - i\lambda p_i (E \frac{\partial}{\partial E} + p_j \frac{\partial}{\partial p_j}).$$

Come in DSR1 questi generatori lasciano invariata l'algebra di Lorentz, ma deformano i commutatori con i generatori delle traslazioni:

$$[N_i, P_0] = i(1 - \lambda P_0)P_i$$

$$[N_i, P_j] = i(\delta_{ij}P_0 - \lambda P_i P_j)$$

Anche nel modello DSR2 è possibile introdurre variabili ausiliarie con proprietà analoghe a quelle usate per il modello DSR1:

$$\epsilon_2 = \frac{E}{1 - \lambda E} \tag{2.18}$$

$$\pi_{2i} = \frac{p_i}{1 - \lambda E}. \tag{2.19}$$

2.4 Modello DSR3

Le differenze tra DSR1 e DSR2 illustrano il tipo di differenza tra scenari che possono essere formulati secondo lo schema DSR. Per il tipo di strutture che saranno studiate nei capitoli 3 e 4, è utile contemplare una terza possibilità, ovvero il modello DSR3² proposto nella [31].

La costruzione di questa DSR parte richiedendo la covarianza della legge della

²Mentre DSR1 e DSR2 sono effettivamente gli acronimi con cui in letteratura si identificano i modelli discussi nei due precedenti paragrafi, per il recente modello della [31], non si è ancora stabilizzata una denominazione standard. Viene qui adottata la denominazione DSR3 intendendo esclusivamente come terzo modello DSR considerato in questo lavoro di tesi.

conservazione dell'energia in un processo di scattering da n a m particelle:

$$\sum_{\alpha=1}^n E^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^m E^{(\beta)}$$

Sotto l'azione dei boost, ottenuta da commutatori del tipo $\delta_k P_0 = \xi [N_k, P_0]$, assumendo indeformato il gruppo di Lorentz $SO(3, 1)$, con $[N_k, P_0] = \pi_k(\vec{P}, \lambda)$, ed in cui π è la nostra variabile ausiliaria.

Si richiede, inoltre

$$\sum_{\alpha=1}^n \pi_k^{(\alpha)}(\vec{p}, \lambda) = \sum_{\beta=1}^m \pi_k^{(\beta)}(\vec{p}, \lambda).$$

La covarianza di quest'ultima, quindi, implica che:

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 [N_j, P_i^{(\alpha)}] \frac{\partial \pi_k^{(\alpha)}}{\partial P_i} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{i=1}^3 [N_j, P_i^{(\beta)}] \frac{\partial \pi_k^{(\beta)}}{\partial P_i}. \quad (2.20)$$

Le equazioni (2.20) sono semplicemente risolte se i commutatori $[N_i, P_j]$ soddisfano le relazioni:

$$\sum_{i=1}^3 [N_j, P_i] \frac{\partial \pi_k}{\partial P_i} = P_0 \delta_{jk}.$$

Questo sistema lineare può essere risolto rispetto a $[N_i, P_j]$, richiedendo che l'azione dei boost sul momento spaziale sia:

$$[N_j, P_i] = P_0 \left(\frac{\partial \pi_j}{\partial P_i} \right)^{-1},$$

dopodichè, dall'azione dei boost sul momento si può facilmente dedurre la forma della relazione di dispersione:

$$E^2 - |\vec{\pi}|^2(\vec{p}, \lambda) = m^2.$$

A questo punto è necessario selezionare una forma di π , tale da rispondere a tutte le richieste finora elencate. Un esempio esplicito si ottiene considerando l'azione dei boost data dai commutatori:

$$[N_i, P_0] = \frac{P_i}{(1 - \lambda|\vec{P}|)}$$

e

$$[N_i, P_j] = E(1 - \lambda|\vec{P}|) \left(\delta_{ij} - \lambda \frac{P_i P_j}{|\vec{P}|} \right),$$

per cui la relazione di dispersione di questa teoria è data da:

$$E^2 = m^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{(1 - \lambda|\vec{p}|)^2} \quad (2.21)$$

Si può, a questo punto, osservare che il valore dell'energia diverge nel momento in cui $|\vec{p}| \rightarrow \frac{1}{\lambda}$, si è, dunque, di fronte ad una DSR che prevede un valore massimo per l'impulso, per cui la fenomenologia prevista dalla DSR3 è molto simile a quella della DSR1.

Le generalizzazioni DSR-covarianti delle regole di conservazione sono:

$$\sum_{\alpha=1}^n E^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^m E^{(\beta)} \quad (2.22)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\vec{p}^{(\alpha)}}{(1 - \lambda|\vec{p}^{(\alpha)}|)} = \sum_{\beta=1}^m \frac{\vec{p}^{(\beta)}}{(1 - \lambda|\vec{p}^{(\beta)}|)} \quad (2.23)$$

Capitolo 3

Proposte di una possibile deformazione planckiana della meccanica statistica

In preparazione per l'analisi che verrà riportata nel prossimo capitolo, in cui verranno studiate deformazioni planckiane dei modelli di Chandrasekhar e T.O.V., in questo capitolo verrà proposto uno scenario per le implicazioni per un gas di fermioni dei modelli di deformazione planckiana delle simmetrie discusse nel capitolo due.

Pur essendo oramai ampia la letteratura nelle deformazioni alla lunghezza di Planck delle simmetrie spazio-temporali, prima di questo lavoro di tesi nessuno aveva mai analizzato specificamente le conseguenze per un gas di fermioni. La sfida fondamentale che è necessario affrontare, per sviluppare un modello che includa in sé gli effetti discussi nel precedente capitolo, è la caratterizzazione delle leggi di composizione dei momenti che intervengono nelle leggi di conservazione. Le non linearità, infatti risultano avere implicazioni piuttosto drammatiche sulla maniera in cui si trasforma il momento totale delle particelle sotto azione dei boost e quindi sulla possibilità di in-

trodurre una legge di conservazione del momento totale valida per tutti gli osservatori, come illustrato nel seguente schema:

$$\begin{array}{ccc}
 P_{tot}^i & = & P_{tot}^f \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 Q_{tot}^i & = & Q_{tot}^f
 \end{array} \tag{3.1}$$

in cui P e Q sono gli impulsi in due diversi sistemi di riferimento, mentre le doppie frecce rappresentano i boost.

Sulla base di questa proposta di formalizzazione si arriverà ad una descrizione di una meccanica statistica deformata con alcune caratteristiche particolarmente significative, tra le quali verranno vagliate in particolare le conseguenze che questo scenario potrebbe apportare all'impulso di Fermi di un sistema.

Nel caratterizzare la proposta per la conservazione del momento totale qui articolata, avrà un ruolo l'algebra di κ -Poincaré e, soprattutto il fatto che, come verrà mostrato nella sezione 3.1, questa è un'algebra di Hopf, piuttosto che un'ordinaria algebra di Lie.

3.1 Le algebre di Hopf

È importante osservare che l'algebra di k -Poincaré, su cui si basano (come discusso nel capitolo due) numerosi tentativi di formulazione del concetto di teoria DSR, è in realtà un'algebra di Hopf [34, 35]. La differenza più significativa tra le algebre di Hopf e le più familiari algebre di Lie, è la presenza di un coprodotto non triviale, per introdurre il quale è necessario introdurre il concetto di coalgebra [32, 33]. Mentre un'algebra è uno spazio

vettoriale su di un campo F , in cui sono definiti i concetti di:

$$\begin{aligned} \text{Prodotto} \quad & \mathcal{M} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \\ \text{Unita'} \quad & \eta : F \rightarrow \mathcal{A}, \end{aligned}$$

una coalgebra è uno spazio vettoriale \mathcal{A} su di un campo F , munito delle mappe lineari:

$$\begin{aligned} \text{Coprodotto} \quad & \Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \text{Counita'} \quad & \epsilon : \mathcal{A} \rightarrow F. \end{aligned}$$

La teoria delle coalgrebre è essenzialmente duale a quella delle algrebre. Infatti, se \mathcal{A} è una coalgebra, allora il suo spazio duale \mathcal{A}^* (lo spazio dei funzionali lineari $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow F$) eredita una struttura puntuale di algebra indotta da Δ e da ϵ .

Un'algebra di Hopf è uno spazio vettoriale \mathcal{A} su di un campo F che sia contemporaneamente un'algebra ed una coalgebra, e che sia dotata di un'ulteriore mappa lineare detta antipodo:

$$\mathcal{S} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A},$$

il cui ruolo è analogo a quello dell'inverso nel collegamento tra algebra e coalgebra.

Un'algebra di Lie può essere generalizzata in una di Hopf tramite la sua *universal enveloping algebra* $U(\mathfrak{g})$, definendo trivialmente coprodotto, counità ed antipodo:

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X \\ \epsilon(X) &= 0 \\ \mathcal{S}(X) &= -X \end{aligned}$$

Per passare alla fisica di un sistema di più particelle si possono seguire due strade: applicare opportunamente ai risultati della teoria lineare una mappa:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0 &= \alpha(P_0, P_i)P_0 \\ \mathcal{P}_i &= \beta(P_0, P_i)P_i,\end{aligned}$$

in cui P_0 e P_i sono gli operatori di traslazione temporale e spaziale, mentre \mathcal{P}_0 e \mathcal{P}_i sono operatori che obbediscono all'algebra di Poincaré; oppure inquadrare il settore a due o più particelle in una struttura algebrica ben definita, e poi applicare, eventualmente, la mappa.

In questo lavoro di tesi si farà riferimento a questo secondo metodo, mentre il primo, proposto in [36] per introdurre leggi di conservazione covarianti in senso DSR, utilizzando le variabili ausiliarie (2.14), (2.15), definite nel capitolo due, non verrà preso in considerazione. Non è possibile, infatti, mappare un'algebra con coprodotto non triviale in una con coprodotto triviale ed i generatori di κ -Poincaré, sui quali si fonda l'analisi di questo capitolo, come già accennato, non chiudono un'algebra di Lie, bensì una di Hopf [34]. A partire da κ -Poincaré, infatti, è possibile riottenere quella classica di Poincaré, solamente facendo tendere $\lambda \rightarrow 0$. È a questo punto necessario chiarire da cosa derivi la non trivialità del coprodotto, in κ -Poincaré, infatti, per far agire l'operatore di traslazione spaziale su di una funzione dell'impulso, occorre far riferimento alle mappe di Weyl (introdotte nello scorso capitolo). In questa maniera nel caso di due o più onde piane, l'autovalore dell'operatore non è più la semplice somma degli impulsi. Ad esempio per le mappe di Weyl con il tempo a destra (2.4):

$$\begin{aligned}P_j^R \Omega_R(e^{ipx}) \Omega_R(e^{ikx}) &= -i \Omega_R((p+k)_j e^{i(p+k)x}) = \\ &= (p_j + e^{-\lambda P_0} k_j) \Omega_R(e^{ipx}) \Omega_R(e^{ikx}).\end{aligned}\quad (3.2)$$

In generale, quindi, nell'algebra di κ -Poincaré i coprodotti dei generatori sono non co-commutativi, in particolare nella base detta *bicrossproduct basis* si ha:

$$\begin{aligned}\Delta(P_0) &= P_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes P_0 & \Delta(P_j) &= P_j \otimes \mathbf{1} + e^{-\lambda P_0} \otimes P_j \\ \Delta(M_j) &= M_j \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes M_j \\ \Delta(N_j) &= N_j \otimes \mathbf{1} + e^{-\lambda P_0} \otimes N_j + \lambda \epsilon_{jkl} P_k \otimes M_l.\end{aligned}\tag{3.3}$$

A partire da questi coprodotti, si ottengono leggi di conservazione deformate del tipo:

$$E_1^i + E_2^i = E_1^f + E_2^f \tag{3.4}$$

$$p_1^i + p_2^i e^{-\lambda E_1^i} = p_1^f + p_2^f e^{-\lambda E_1^f} \tag{3.5}$$

Che chiaramente non chiudono, in maniera banale, la (3.1), in un'ottica in cui P_{tot} e Q_{tot} sono deformati. Per evitare tutto ciò, in questa tesi si utilizzerà una misura invariante ottenuta dalla non sommabilità classica degli impulsi, che poi si mostrerà essere covariante.

3.2 Regole di somma non abelliane per i momenti e misura d'integrazione.

La (3.2) mostra la deformazione alla legge di composizione dei momenti che interviene nella teoria delle geometrie non commutative, questa legge impone che la somma degli impulsi p e k di due distinte particelle non sia più $p + k$, bensì:

$$p + e^{-\lambda E(p)} k.$$

Come questa deformazione del concetto di somma, che in letteratura è indicata con $\dot{+}$, agisca sulle regole d'integrazione dei momenti non è stato precedentemente stabilito in letteratura. In questo lavoro di tesi, verrà proposto di codificare questa implicazione, all'interno di una nuova misura d'integrazione. Per motivare tale proposta, è utile investigare come la deformazione della misura potrebbe modificare la relazione tra funzione integranda e risultato dell'integrazione.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale a partire dalle:

$$F(k) = \int_0^k f(q) dq \quad (3.6)$$

$$F'(k) = \frac{F(k+h) - F(k)}{h} \quad (3.7)$$

$$\frac{F(k+h) - F(k)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{k+h} f(q) dq \quad (3.8)$$

impone che, al tendere di $h \rightarrow 0$ per il teorema della media integrale, valga l'identità tra derivata della (3.6) con la funzione integranda:

$$F'(k) = f(k). \quad (3.9)$$

La deformazione della regola di somma degli impulsi (3.2), però, non permette l'identificazione della funzione primitiva come integrale della propria derivata (a meno di una costante). Infatti, passando da $+$ al concetto di $\dot{+}$, la (3.7) porta a:

$$\begin{aligned} F'(p) &= \frac{F(p\dot{+}\Delta p) - F(p)}{\Delta p} = \frac{F(p + \Delta p e^{-\lambda E}) - F(p)}{\Delta p} \simeq \\ &\simeq \frac{F(p)}{\Delta p} + \frac{\frac{\partial F(p)}{\partial p} e^{-\lambda E}}{\Delta p} \Delta p - \frac{F(p)}{\Delta p} = \frac{\partial F(p)}{\partial p} e^{-\lambda E}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Allo stesso modo, deformando la (3.8), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{p+e^{-\lambda E} \Delta p} f(q) dq - \int_0^p f(q) dq}{\Delta p} &= \frac{1}{\Delta p} \int_p^{p+e^{-\lambda E} \Delta p} f(q) dq = \\ &= \frac{e^{-\lambda E}}{e^{-\lambda E} \Delta p} \int_p^{p+e^{-\lambda E} \Delta p} f(q) dq \quad (3.11) \end{aligned}$$

e quindi applicando il teorema del limite integrale:

$$F'(p) = f(p)e^{-\lambda E}. \quad (3.12)$$

A questo punto sfruttando l'interpretazione fisica del concetto d'integrazione, come somma di rettangolini infinitesimi:

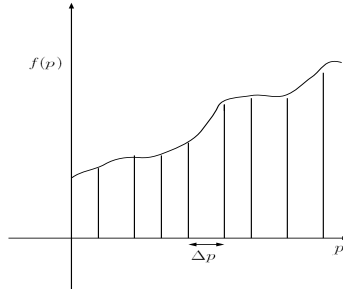


Figura 3.1: Rappresentazione grafica dell'interpretazione fisica del concetto d'integrazione.

$$F(p) = \sum_n F'_n(p) \Delta p_n,$$

passando al limite del continuo si ottiene:

$$F(p) = \int_0^p f(q) e^{-\lambda E} dq, \quad (3.13)$$

in cui, confrontando (3.10) e (3.11), si riconosce:

$$f(p) = \frac{\partial F(p)}{\partial p},$$

confermando quindi che la funzione primitiva, per variabili con regola di somma deformata, non è più ottenibile dalla semplice integrazione della propria derivata, bensì dall'integrazione di quest'ultima con misura d'integrazione deformata.

Si arriva, perciò, alla definizione:

$$F(p) = \int_0^p \frac{\partial F(q)}{\partial q} e^{-\lambda E} dq, \quad (3.14)$$

in cui la non abelianità della regola di somma è stata tradotta in una deformazione della misura d'integrazione. questa deformaione prevede per l'elemento di volume nello spazio delle fasi la riespressione:

$$d^3p \rightarrow e^{-3\lambda E} d^3p, \quad (3.15)$$

e, dato che, rifacendosi alle (3.4,3.5), la somma delle energie è classica, non è necessario introdurre alcuna deormazione per dE , per cui la riformulazione della misura invariante e:

$$d^4p \rightarrow e^{-3\lambda E} d^4p. \quad (3.16)$$

Questa misura d'integrazione deformata era già stata introdotta in letteratura in [37] per avere una misura invariante sotto l'azione delle trasformazioni di Lorentz deformate, cosicchè le variazioni sotto rotazione e boost rispettino:

$$\int M_i(f(E, p)) = 0 \quad e \quad \int N_i(f(E, p)) = 0,$$

se $f(E, p)$ decresce con sufficiente rapidità all'infinito.

La deformazione della misura d'integrazione è, quindi, una prescrizione che da sola introduce nell'analisi sia le leggi di conservazione deformate (3.5) che i criteri di covarianza in senso DSR. Il suo inserimento, nel modello fenomenologico qui presentato, quindi, permette di chiudere il ciclo (3.1).

Lo stesso articolo [37] che introduce il concetto di misura deformata non fissa, però, la sua forma, introducendo la formulazione generica:

$$e^{\theta\lambda E} d^4 p,$$

in cui θ è un parametro libero di variare. È possibile, infatti, richiedendo solamente la covarianza dell'integrazione, giungere ad altre proposte di misure d'integrazione invarianti [38]. Infatti, riferimento alle (2.8), si possono definire:

$$\delta P_i \equiv \epsilon^j [N_j, P_i] = \epsilon_i \left(\frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2P_0\lambda}) + \frac{\lambda}{2} \vec{P}^2 \right) - i\lambda \epsilon^j P_j P_i \quad (3.17)$$

$$\delta P_0 \equiv \epsilon^i [N_i, P_0] = \epsilon^i P_i \quad (3.18)$$

in cui ϵ è infinitesima e, facendo uso del fatto che, per spazi n dimensionali:

$$\delta(d^{n+1}p) = \sum_1^{1+n} \frac{\partial \delta p_\mu}{\partial p_\mu} d^{n+1}p, \quad (3.19)$$

si ottiene facilmente che:

$$\delta d^4 p = -3\lambda \epsilon^i p_i d^4 p, \quad (3.20)$$

e che, quindi, imponendo la variazione a zero:

$$\delta(d\mu(p)) = \delta(\mu(p))d^4 p + \mu(p)\delta(d^4 p) = 0,$$

si avrà:

$$\delta(\mu(p)) = 3\lambda\epsilon^i p_i \mu(p).$$

Per cui, ricorrendo alla (3.18) si deduce la misura invariante:

$$d\mu(p) = e^{3\lambda E} d^4p. \quad (3.21)$$

In letteratura non vi è una particolare predilezione per una forma della misura piuttosto che di un'altra, per cui in questo lavoro di tesi per inserire elementi derivanti dalla deformazione del concetto di covarianza o della somma degli impulsi (dei quali in questo paragrafo è stato mostrato lo stretto legame) ci si baserà su di un'ampia parametrizzazione, cioè si utilizzerà lo sviluppo al primo ordine in λ di

$$e^{\theta\lambda P_0} d^4p \quad (3.22)$$

che, nel caso in cui si faccia l'ipotesi fisicamente sensata $\lambda = L_p$, sarà dato da:

$$\left(1 + \theta \frac{E}{E_p}\right) d^4p, \quad (3.23)$$

in cui si è sfruttato il fatto che in unità $c = \hbar = 1$, $L_p = \frac{1}{E_p}$.

3.3 La relazione di dispersione

La forma del casimir deformato (2.10) suggerisce¹ una corrispondente descrizione della relazione di dispersione tra energia ed impulso di una particella:

$$\left(\frac{2}{\lambda} \sinh\left(\frac{\lambda E}{2}\right)\right)^2 - |\vec{p}|^2 e^{\lambda E} = \left(\frac{2}{\lambda} \sinh\left(\frac{\lambda m_0}{2}\right)\right)^2. \quad (3.24)$$

¹Questa corrispondenza tra forma del casimir e forma della relazione di dispersione è presente nelle teorie in spazio-tempo classico, e molti autori ne hanno assunto la validità anche nel caso di spazio-tempo non commutativo. Idee più chiare su quest'interpretazione stanno venendo da lavori di analisi di Noether di teorie in spazio-tempo non commutativo [40, 39]

Esplicitando l'energia si ottiene:

$$E = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1 \pm \lambda \sqrt{|\vec{p}|^2 (1 - (2 \sinh(\frac{\lambda m_0}{2}))^2) + (\frac{2}{\lambda} \sinh(\frac{\lambda m_0}{2}))^2}}{1 - \lambda^2 |\vec{p}|^2} \right), \quad (3.25)$$

che, nel caso non massivo, si riscrive come:

$$E = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1 - \lambda |\vec{p}|} \right). \quad (3.26)$$

A partire da quest'ultima espressione è possibile evidenziare un comportamento molto importante per la fenomenologia, cioè la divergenza dell'energia per $p \rightarrow \frac{1}{\lambda}$ (tale valore verrà identificato con la scala di Planck²).

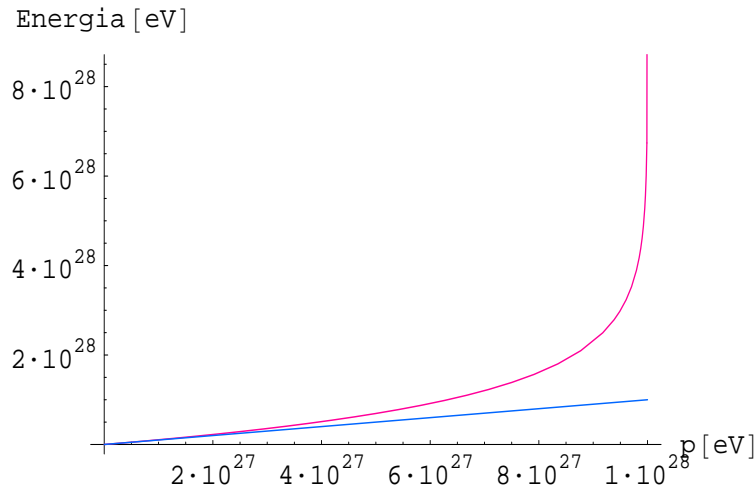


Figura 3.2: Relazione tra energia (asse delle y) ed impulso (asse delle x) nei casi classico e deformato, riportati rispettivamente in blu ed in viola, nel caso massivo per una particella con massa di 1 GeV.

E' facile verificare che, al tendere di $\lambda \rightarrow 0$, la (3.24) si riduce alla relazione

²A questo valore dell'impulso, infatti, ci si aspetta che emergano fenomeni legati alla quantizzazione dello spazio-tempo

di dispersione classica:

$$E^2 - |\vec{p}|^2 = m_0^2. \quad (3.27)$$

Per $\lambda \neq 0$, ma piccolo, invece, la (3.24) si può approssimare come:

$$E^2 - m_0^2 = |\vec{p}|^2 + \lambda |\vec{p}|^2 E. \quad (3.28)$$

L'analisi riportata nel prossimo capitolo farà riferimento solo alla (3.28), poichè, l'aspettativa $\lambda \sim 10^{-28} eV^{-1}$ rende già improbabile la possibilità di investigare sperimentalmente la correzione al primo ordine e ci consente di escludere la possibilità di manifestazioni sperimentalmente osservabili degli ordini superiori.

Il caso di κ -Poincaré, appena mostrato, è un esempio particolare del tipo di parametrizzazione fenomenologica delle relazioni di dispersione modificate (M.D.R.) più comune in letteratura:

$$E^2 - m^2 \simeq |\vec{p}|^2 + \eta |\vec{p}|^2 \frac{E^\alpha}{E_p^\alpha}. \quad (3.29)$$

Dato che ci si aspetta che i termini correttivi siano il frutto dell'espansione in serie della relazione di dispersione rispetto alla scala di deformazione, è lecito aspettarsi che α sia un intero, mentre η è un coefficiente che può essere positivo o negativo.

3.4 conseguenze fisiche per l'impulso di Fermi.

Per il tipo di analisi che verrà riportato nel prossimo capitolo, è particolarmente utile considerare le implicazioni che le nuove leggi di conservazione (3.5) hanno sull'impulso di Fermi. Tale quantità come visto in dettaglio nel

primo capitolo mediante il modello di Landau, è fondamentale nell'analisi dei modelli delle stelle compatte. La sua formula deformata sarà, quindi, più volte utilizzata nel prossimo capitolo per introdurre, nei modelli trattati, correzioni quanto gravitazionali. L'impulso di Fermi è classicamente definito dall'area della sfera di fermi sullo spazio degli impulsi:

$$N = (2S + 1) \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_{S_F} d^3p = (2S + 1) \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^2 dp \quad (3.30)$$

in cui $2S + 1$ è la degenerazione di spin, V il volume e S_F la sfera di fermi. Integrando e prendendo la radice cubica di entrambi i termini dell'equazione, si trova:

$$p_F = \left(\frac{3 N (2\pi)^2 \hbar^3}{2 V (2S + 1)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.31)$$

Seguendo la strategia qui proposta di prima caratterizzazione delle modifiche richieste dalla quantizzazione dello spazio-tempo, questa derivazione classica dell'impulso di Fermi va modificato prendendo in considerazione la (3.23):

$$\begin{aligned} N &= (2S + 1) \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^2 \left(1 + \theta \frac{E}{E_p}\right) dp = \\ &= (2S + 1) \frac{2V}{(2\pi)^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{3} p_F^3 + \frac{\theta}{E_p} \int_0^{p_F} p^2 E(p) dp \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

È facile notare che questa descrizione dà luogo a comportamenti molto diversi nei casi non relativistico ($E(p) = \frac{p^2}{2m}$) ed ultrarelativistico ($E(p) = pc$), infatti nel primo caso si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{N (2\pi)^2 \hbar^3}{V (2S + 1)} = \frac{1}{3} p_F^3 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{\theta}{E_p} \frac{p_F^2}{2m} \right). \quad (3.33)$$

E quindi si ottiene che il massimo impulso permesso per le particelle di un sistema allo zero assoluto è:

$$p_F = \left(\frac{3 N (2\pi)^2 \hbar^3}{2 V (2S + 1)} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{5} \frac{\theta}{E_p} \frac{\left(\frac{3 N (2\pi)^2 \hbar^3}{2 V (2S + 1)} \right)^{\frac{2}{3}}}{2m} \right), \quad (3.34)$$

dove si è anche fatto uso di un'approssimazione al primo ordine in $\frac{1}{E_p}$ della (3.33).

Nel caso ultrarelativistico, invece, si trova:

$$\frac{1}{2} \frac{N (2\pi)^2 \hbar^3}{V (2S + 1)} = \frac{1}{3} p_F^3 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\theta}{E_p} p_F c \right), \quad (3.35)$$

e corrispondentemente a quanto fatto precedentemente si ottiene per l'impulso di Fermi:

$$p_F = \left(\frac{3 N (2\pi)^2 \hbar^3}{2 V (2S + 1)} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\theta}{E_p} \left(\frac{3 N (2\pi)^2 \hbar^3}{2 V (2S + 1)} \right)^{\frac{1}{3}} c \right). \quad (3.36)$$

A seconda del valore di θ il sistema si comporterà in due modi diametralmente opposti: per θ positivo all'aumentare della densità di fermioni nel sistema, l'impulso di Fermi tenderà al valore limite $p_F \sim E_p$ senza mai raggiungerlo; mentre per θ negativo si ha, all'aumentare della compressione, una crescita dell'impulso di Fermi superiore al caso classico.

Ad esempio in κ -Minkowski per $\theta = 3$ la formula (3.30) in unità $\hbar = c = 1$ diviene:

$$N = (2S + 1) \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^2 e^{3\lambda E} dp, \quad (3.37)$$

che, alla luce della (3.26), si può riscrivere nel modo seguente:

$$\frac{N}{V} \frac{2\pi^2}{2S + 1} = \int_0^{p_F} \frac{p^2}{(1 - \lambda p)^3} dp. \quad (3.38)$$

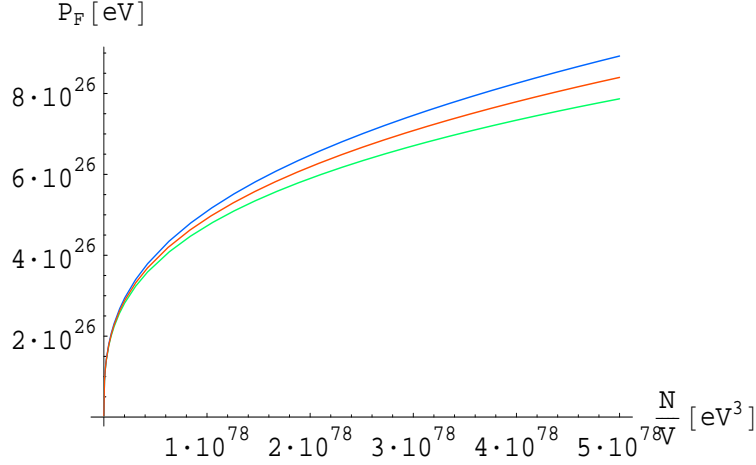


Figura 3.3: Andamento dell'impulso di Fermi in funzione della densità di fermioni del sistema (con scelta di unità di misura tale che $c = \hbar = 1$), la curva in rosso grafica il caso classico, mentre in verde ed in blu sono riportati rispettivamente i casi deformati con $\theta = 3$ e $\theta = -3$.

Quindi, risolvendo l'integrale si trova:

$$\frac{N}{V} \frac{2\pi^2}{2S+1} = \frac{\lambda p_F (3\lambda p_F - 2)}{2\lambda^3 (1 - \lambda p_F)^2} - \frac{1}{\lambda^3} \ln(1 - \lambda p_F) \quad (3.39)$$

la cui approssimazione al primo ordine in λ :

$$\frac{N}{V} \frac{2\pi^2}{2S+1} = \frac{1}{3} p_F^3 \left(1 + 3\frac{3}{4} \lambda p_F \right).$$

riproduce la (3.35) per $\theta = 3$ e $E_p = 1/\lambda$.

Osservando la (3.39) è evidente come per $p_F \rightarrow 1/\lambda$ la densità di particelle diverga, e, di conseguenza non esista un valore di $\frac{N}{V}$ per cui l'impulso di Fermi del sistema possa essere uguale all'impulso di Planck.

Nel caso in cui, invece, si adotti $\theta = -3$, si ha:

$$N = (2S + 1) \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^2 e^{-3\lambda E} dp, \quad (3.40)$$

e, usando ancora la (3.26), per eliminare la dipendenza esplicita dall'energia, si arriva al seguente risultato:

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} \frac{2\pi^2}{2S + 1} &= \int_0^{p_F} p^2 (1 - \lambda|p|)^3 dp = \frac{N}{V} \frac{2\pi^2}{2S + 1} = \\ &= \frac{p_F^3}{3} - \frac{3}{4} \lambda p_F^4 + \frac{3}{5} \lambda^2 p_F^5 - \frac{1}{6} \lambda^3 p_F^6. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Trascurando i termini $O(\lambda^2)$ si ritrova nuovamente la (3.35), con $E_p = 1/\lambda$, nel caso $\theta = -3$:

$$\frac{N}{V} \frac{2\pi^2}{2S + 1} = \frac{1}{3} p_F^3 \left(1 - 3 \frac{3}{4} \lambda p_F \right).$$

È stato già accennato che i casi in cui si assuma θ positivo ed i casi in cui lo si assuma negativo danno luogo a conseguenze fenomenologiche differenti. Osservando la (3.41), ad esempio, si può notare come $\theta = 3$ imponga che p_F non possa mai raggiungere il valore E_p , valore dell'impulso di Fermi a cui ci si aspetta che sorgano effetti dovuti alla quantizzazione dello spazio-tempo, cosa che non accade nella (3.39) per $\theta = -3$.

Nell'analisi riportata nel prossimo capitolo si potrà osservare come $\theta = -3$ porti a conseguenze più distanti dal caso classico rispetto a $\theta = 3$.

Per rendere più intelleggibili queste considerazioni può essere utile offrire qui un argomento che suggerisca, appunto, che i casi con θ positivo debbano necessariamente dar luogo ad effetti molto piccoli. Specificamente l'osservazione che la DSR3 (assimilabile ad un caso in cui si preveda $\theta > 0^3$) dà addirittura luogo a risultati non deformati per il modello di Landau.

³Questo perchè come per i casi con θ positivo, anche in DSR3 l'integrale diverge nel caso in cui si assuma $p_F > 1/\lambda$.

Come visto nel secondo capitolo la DSR3 può essere descritta efficacemente introducendo dei momenti ausiliari π con regola di somma usuale (abeliana), come util strumento di elaborazione delle proprietà dei momenti osservabili p con regola di somma non abeliana, a cui sono legati dalla relazione $\vec{\pi} = \frac{\vec{p}}{1-\lambda|\vec{p}|}$. Nella DSR3 avremo quindi:

$$N = (2S + 1) \frac{4\pi V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{\pi_F} \pi^2 d\pi, \quad (3.42)$$

eovvero:

$$\pi_F = \frac{p_F}{1 - \lambda p_F} = \left(3\pi^2 \hbar^3 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}},$$

e quindi la relazione tra impulso di Fermi e densità ha la forma seguente:

$$p_F = \frac{\left(3\pi^2 \hbar^3 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 + \lambda \left(3\pi^2 \hbar^3 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}}. \quad (3.43)$$

Tenendo conto della relazione di dispersione deformata (2.21), caratteristica della DSR3, si ottiene:

$$E(R) = \pi_F - G \frac{M m_f}{R} = \frac{p_F}{1 - \lambda p_F} - G \frac{M m_f}{R}, \quad (3.44)$$

dove, coerentemente con la relazione introdotta nel capitolo uno, $E(R)$ descrive l'energia di un fermione sulla superficie di una stella compatta. Combinando la (3.43) e la (3.44) si arriva al seguente risultato:

$$E(R) = \frac{\frac{\left(3\pi^2 \hbar^3 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 + \lambda \left(3\pi^2 \hbar^3 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}}}{1 - \lambda \frac{\left(3\pi^2 \hbar^3 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 + \lambda \left(3\pi^2 \hbar^3 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}}} - G \frac{M m_f}{R} = \left(3\pi^2 \hbar^3 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} - G \frac{M m_f}{R},$$

che, come anticipato, non modifica in nessun modo la corrispondente predizione del modello di Landau classico.

Capitolo 4

Modifiche ai modelli di Chandrasekhar e T.O.V.

In questo capitolo si applicherà il modello fenomenologico alla scala di Planck sviluppato nel capitolo precedente, ai modelli astrofisici presentati nel primo capitolo, ovvero il modello di Chandrasekhar ed il modello T.O.V..

Per il modello di Chandrasekhar verranno in particolare analizzate le modifiche della relazione raggio/massa delle nane bianche. Per il modello Tolman-Oppenheimer-Volkoff, verranno studiate le implicazioni delle deformazioni plankiane su gas di fermioni estremamente compressi.

4.1 Modifiche al modello di Chandrasekhar

Le nane bianche sono state presentate, nel primo capitolo, come un gas degenere di elettroni, in cui la curvatura spazio-temporale non porta ancora correzioni di rilievo al potenziale newtoniano. Queste caratteristiche facilitano (rispetto al caso general relativistico) l'analisi delle correzioni dovute a MDR ed alla associata deformazione della misura.

Per l'introduzione di effetti plankiani nel modello di Chandrasekhar, se-

condo lo schema introdotto nel capitolo tre, il primo passo è l'osservazione che l'equazione (1.2) del modello di Chandrasekhar alla luce delle equazioni (3.23) e (3.29) va riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
E_0 &= \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_F} dp \left(1 + \theta \frac{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}}{E_p} \right) 4\pi p^2 \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} \times \\
&\times \left(1 + \frac{\eta}{2} \frac{(pc)^2}{(pc)^2 + (mc^2)^2} \left(\frac{\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}}{E_p} \right)^\alpha \right) \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Il termine nelle prime parentesi tonde, dovuto alla (3.23), interviene all'ordine $\frac{1}{E_p}$. Quindi l'unico caso in cui il termine tra le ultime parentesi tonde, dovuto alla relazione di dispersione modificata (3.29), può dare un contributo significativo è $\alpha = 1$. Sarà, quindi, assunto in quanto segue appunto $\alpha = 1$. In particolare per la (4.1) si ha:

$$\begin{aligned}
E_0 &= E_{0Class} + \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{1}{E_p} \right) \left(\left(\theta + \frac{\eta}{2} \right) \int_0^{p_F} 4\pi p^4 c^2 dp + \theta m_e^2 c^4 \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp \right) = \\
&= E_{0Class} + \frac{2V m_e^4 c^5}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{m_e c^2}{E_p} \right) \left(\left(\theta + \frac{\eta}{2} \right) \int_0^{x_F} 4\pi x^4 dx + \theta m_e^2 \int_0^{x_F} 4\pi x^2 dx \right)
\end{aligned}$$

in cui è stata anche introdotta la variabile adimensionale $x = \frac{p}{m_e c}$. Si trova quindi che la formula che descrive l'energia dello stato fondamentale del gas prende la forma:

$$E_0 = E_{0Class} + \frac{8\pi V m_e^4 c^5}{(2\pi\hbar)^3} \left(\left(\theta + \frac{\eta}{2} \right) \frac{m_e c^2}{E_p} x_F^5 + \theta \frac{m_e c^2}{E_p} x_F^3 \right)$$

ovvero:

$$E_0 = \frac{m_e^4 c^5 V}{\pi^2 \hbar^3} \left(f(x_F) + \frac{m_e c^2}{E_p} g(x_F) \right) \quad (4.2)$$

in cui $f(x_F)$ è stata definita in (1.5) mentre:

$$g(x_F) \equiv \left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)x_F^5 + \theta x_F^3. \quad (4.3)$$

Dalla (4.2) si deduce che la pressione del gas è

$$P_0 = -\frac{\partial E_0}{\partial V} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\partial f(x_F)}{\partial x_F} \frac{\partial x_F}{\partial V} V - f(x_F) + \frac{m_e c^2}{E_p} \left(\frac{\partial g(x_F)}{\partial x_F} \frac{\partial x_F}{\partial V} V - g(x_F) \right) \right). \quad (4.4)$$

Tenendo presente che:

$$V \frac{\partial x_F}{\partial V} = -\frac{1}{3} x_F,$$

il termine correttivo alla pressione si può riscrivere nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x_F)}{\partial x_F} \frac{\partial x_F}{\partial V} V - g(x_F) &= \frac{5}{3} \left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)x_F^5 + \theta x_F^3 - \left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)x_F^5 - \theta x_F^3 = \\ &= \frac{2}{3} \left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)x_F^5 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Per cui le formule classiche per la pressione (1.10) (1.11) nei casi non relativistico e ultrarelativistico divergono:

$$P_0 = \left(\frac{m_e^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3} \right) x_F^5 + \frac{2}{3} \frac{m_e c^2}{E_p} \left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)x_F^5 \quad (x_F \ll 1) \quad (4.6)$$

$$P_0 = \left(\frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \right) (x_F^4 - x_F^2) + \frac{2}{3} \frac{m_e c^2}{E_p} \left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)x_F^5 \quad (x_F \gg 1). \quad (4.7)$$

A partire dalla (4.6) è possibile osservare immediatamente che la correzione alla scala di Planck non è osservabile nel caso non relativistico, in quanto l'approssimazione ($x_F \ll 1$) dà:

$$P_0 = \frac{4}{5} K \left(1 + \frac{m_e c^2}{E_p} 10 \left(\theta + \frac{\eta}{2}\right) \right) x_F^5, \quad (4.8)$$

in cui evidentemente la correzione dipende da x_F esattamente allo stesso modo del termine classico, rendendo di fatto inosservabili gli effetti apportati dalle modifiche alla scala di Planck. Per quanto concerne x_F , si trova che nel caso non relativistico, a causa della ridefinizione dell'impulso di Fermi del sistema (3.34), si ha:

$$x_F = \frac{\bar{M}^{\frac{1}{3}}}{\bar{R}} \left(1 - \frac{\theta}{10} \frac{m_e c^2}{E_p} \frac{\bar{M}^{\frac{2}{3}}}{\bar{R}^2} \right). \quad (4.9)$$

in cui ovviamente la (1.14) viene riprodotta nel limite $E_p \rightarrow 0$.

Uguagliando, quindi, la formula della pressione corretta (4.6) in cui è stata anche riespressa x_F tramite la relazione (4.9), con la pressione dovuta all'attrazione gravitazionale (1.7) si trova l'equazione:

$$\bar{R}^2 \left(\bar{R} - \frac{4}{5} \frac{K}{K'} \bar{M}^{-\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{m_e c^2}{E_p} 10 \left(\theta + \frac{\eta}{2} \right) \right) \right) = \frac{4}{5} \frac{K}{K'} \frac{\theta}{2} \frac{m_e c^2}{E_p} \bar{M}^{\frac{1}{3}}. \quad (4.10)$$

Al fine di individuare le soluzioni per il raggio previste da questa relazione, è utile cominciare rivisitando le soluzioni del modello classico di Chandrasekhar, che sono soluzioni della (4.10) nel limite $E_p \rightarrow 0$. È conveniente prima di tutto osservare che la (4.10) ed il suo limite per $E_p \rightarrow 0$, sono entrambe del tipo:

$$y = \bar{R}^n (\bar{R} - X).$$

Il caso $y = 0$ ed $n = 0$ riproduce il caso classico (1.15) nel limite $E_p \rightarrow 0$, mentre il caso $y = 0$ e $n \neq 0$ (con n intero) avrà come soluzione X più n soluzioni nulle che non comportano alcuna novità dal punto di vista fisico. Il caso della (4.10) corrisponde a $n = 2$, e $y \neq 0$ che equivale a traslare la curva $f(\bar{R})$ in alto, spostando le soluzioni per \bar{R} di un certo ΔX . Tale traslazione si ottiene approssimando la funzione ad una retta, con coefficiente angolare m pari al valore della derivata della funzione in X , e traslando questa retta

in alto di y , ricavando lo spostamento della soluzione dalla relazione:

$$\Delta X \approx \frac{y}{m}.$$

Il coefficiente angolare della funzione è:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{R}} (\bar{R}^n (\bar{R} - X))_{\bar{R}=X} = X^n.$$

La correzione, quindi nel caso della (4.10) è:

$$\Delta X \simeq \frac{\frac{4}{5} \frac{K}{K'} \frac{\theta}{2} \frac{m_e c^2}{E_p} \bar{M}^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{4}{5} \frac{K}{K'} \bar{M}^{-\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{m_e c^2}{E_p} 10 \left(\theta + \frac{\eta}{2} \right) \right) \right)^2}.$$

Per cui l'andamento raggio-massa nel caso non relativistico è:

$$\bar{R} = \bar{M}^{-\frac{1}{3}} \frac{K}{K'} - \frac{4}{5} \frac{\theta}{2} \frac{m_e c^2}{E_p} \frac{K'}{K} \bar{M}. \quad (4.11)$$

Quindi, essendo $\frac{m_e c^2}{E_p} \sim 10^{-22}$, $\frac{K}{K'} \sim 10^{38}$ e, di conseguenza, $\frac{K'}{K} \sim 10^{-38}$, la correzione prevista risulta essere dell'ordine di $10^{-15}m$ per oggetti di una massa solare. Questa correzione, sebbene di molti ordini di grandezza superiore alla lunghezza di Planck, e quindi macroscopica dal punto di vista quanto gravitazionale¹, non sono osservabili in alcun caso, in quanto all'aumentare della massa della nana bianca inevitabilmente aumenta l'attrazione gravitazionale e, quindi, aumentano la compressione del gas e l'impulso di Fermi del sistema che passa in regime ultrarelativistico.

¹Risultati di questo genere sono di buon auspicio per una futura formulazione di una fenomenologia alla scala di Planck, in quanto forniscono un controesempio all'idea che non sia possibile una manifestazione macroscopica di effetti alla scala di Planck in oggetti astrofisici.

L'analisi dà esiti (almeno per alcuni aspetti) significativamente diversi nel caso ultrarelativistico (4.7). Per $x_F \gg 1$, infatti, come mostrato nella (4.5), la correzione ha un andamento del tipo x_F^5 , esiste quindi la possibilità che questa, pur avendo coefficiente molto piccolo (multiplo appunto della scala di Planck), per x_F sufficientemente grandi compete con il termine classico di tipo x_F^4 .

La condizione d'equilibrio nell'approssimazione $x_F \gg 1$ prende la forma:

$$\frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} (x_F^4 - x_F^2) + \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{2}{3} (\theta + \frac{\eta}{2}) \frac{m_e c^2}{E_p} x_F^5 \right) = K' \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} \quad (4.12)$$

uguagliando la pressione corretta (a destra) con la pressione dovuta all'attrazione gravitazionale (a sinistra).

Riesprimendo x_F in funzione di \bar{M} e \bar{R} parallelamente a quanto già fatto nel caso non relativistico, ovvero, utilizzando la (3.36), si ha:

$$x_F = \frac{\bar{M}^{\frac{1}{3}}}{\bar{R}} \left(1 - \frac{\theta m_e c^2}{4 E_p} \frac{\bar{M}^{\frac{1}{3}}}{\bar{R}} \right), \quad (4.13)$$

tramite la quale la (4.12) può essere riformulata nella maniera seguente:

$$K \left\{ \frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4} \left(1 - \theta \frac{m_e c^2}{E_p} \frac{\bar{M}^{\frac{1}{3}}}{\bar{R}} \right) - \frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2} \left(1 - \frac{\theta m_e c^2}{2 E_p} \frac{\bar{M}^{\frac{1}{3}}}{\bar{R}} \right) \right\} + 8 \left(\theta + \frac{\eta}{2} \right) \frac{m_e c^2}{E_p} K \frac{\bar{M}^{5/3}}{\bar{R}^5} = K' \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4}.$$

É conveniente riscrivere questa formula moltiplicando ambo i membri per \bar{R}^5 e riorganizzando un po' i termini:

$$\bar{R}^3 - \frac{\theta m_e c^2}{2 E_p} \bar{M}^{\frac{1}{3}} \bar{R}^2 + \left(\frac{K'}{K} \bar{M}^{4/3} - \bar{M}^{2/3} \right) \bar{R} + \left(\theta + 8 \left(\theta + \frac{\eta}{2} \right) \right) \frac{m_e c^2}{E_p} \bar{M} = 0 \quad (4.14)$$

A questo punto è opportuno, per ottenere la nuova soluzione di equilibrio,

procedere per passi, esattamente come per il caso non relativistico. Considerando l'uguaglianza a zero come intersezione di una curva con l'asse delle x , nel caso di un polinomio di secondo grado si ha:

$$y = \bar{R}^2 + \left(\frac{K'}{K} \bar{M}^{4/3} - \bar{M}^{2/3} \right)$$

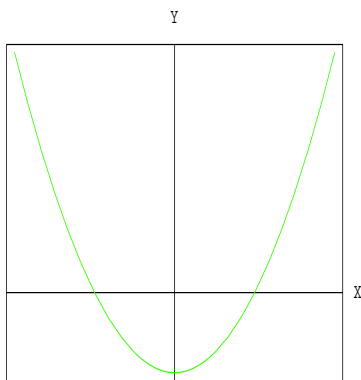


Figura 4.1: Grafico esplicativo dell'interpretazione delle soluzioni d'equilibrio come intersezioni di una curva con l'asse delle ascisse, la curva classica è una parabola in funzione del raggio della stella. Uno e meno uno rappresentano le due soluzioni classiche di cui, naturalmente solamente quella positiva ha senso fisico.

con due soluzioni per $y = 0$ di cui naturalmente nel caso classico si prende solo quella positiva.

Dopodichè, incrementando l'ordine si ha:

$$y = \bar{R}^3 + \left(\frac{K'}{K} \bar{M}^{4/3} - \bar{M}^{2/3} \right) \bar{R}$$

con tre intersezioni con l'asse delle ascisse, le due precedenti e zero, soluzione che non rappresenta alcuna novità dal punto di vista fisico.

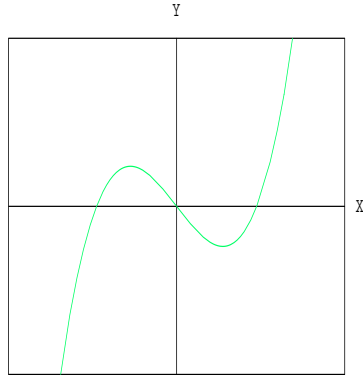


Figura 4.2: Nel grafico è rappresentata la funzione $y(x) = x^3 - x$, come esempio delle conseguenze che può avere sulle soluzioni d'equilibrio l'aumento del grado dell'equazione nel raggio: alle soluzioni d'equilibrio in fig (4.1) si aggiunge solamente $R = 0$.

L'aggiunta della correzione equivale a traslare la figura in alto di: $(\theta + 8(\theta + \frac{\eta}{2}))\frac{m_e c^2}{E_p} \bar{M}$,

$$\bar{R}^3 + \left(\frac{K'}{K} \bar{M}^{4/3} - \bar{M}^{2/3} \right) \bar{R} + (\theta + 8(\theta + \frac{\eta}{2}))\frac{m_e c^2}{E_p} \bar{M} = 0.$$

Questo spostamento verso l'alto della curva, corrisponde ad un corrispettivo spostamento della sua intersezione con l'asse delle x.

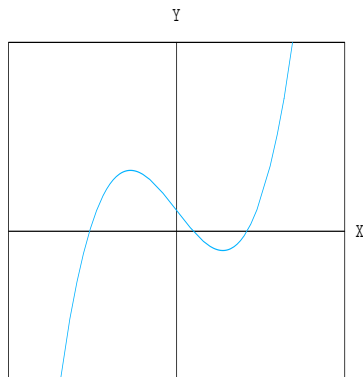


Figura 4.3: Il grafico mostra l'effetto sulle soluzioni d'equilibrio di una traslazione verso l'alto: si osserva lo spostamento verso sinistra della soluzione classica e l'apparizione di un'altra soluzione d'equilibrio per raggi estremamente piccoli.

L'aggiunta del termine $\frac{\theta}{2} \frac{m_e c^2}{E_p} \bar{M}^{\frac{1}{3}} \bar{R}^2$ cambia minimamente l'analisi in corso, in quanto altro non fa che deformare di poco il risultato classico, deformazione che, nel risultato finale contribuirà solo per ordini di $\frac{m_e c^2}{E_p}$ superiori al secondo. Il risultato deformato da questo termine quindi diviene:

$$\bar{R} \simeq \bar{M}^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\frac{2}{3}}} \left(1 + \frac{\theta}{4} \frac{m_e c^2}{E_p} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\frac{2}{3}}}} \right) \quad (4.15)$$

Per calcolare ora il contributo alla deformazione dovuto alla traslazione verso l'alto si procede approssimando la funzione nei pressi del punto di intersezione appena ottenuto ad una retta (come visto nel caso non relativistico), il cui coefficiente angolare sarà:

$$\begin{aligned} m &= \left(3\bar{R}^2 - \theta \frac{m_e c^2}{E_p} \bar{M}^{\frac{1}{3}} \bar{R} + \left(\frac{K'}{K} \bar{M}^{4/3} - \bar{M}^{2/3} \right) \right)_{\bar{R}=\bar{R}_{Class}} = \\ &= 3 \left(\bar{M}^{1/3} \sqrt{1 - \frac{K'}{K} \bar{M}^{2/3}} \left(1 + \frac{\theta}{4} \frac{m_e c^2}{E_p} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\frac{2}{3}}}} \right) \right)^2 + \left(\bar{M}^{1/3} \sqrt{1 - \frac{K'}{K} \bar{M}^{2/3}} \right) + \\ &\quad - \theta \frac{m_e c^2}{E_p} \bar{M}^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - \frac{K'}{K} \bar{M}^{2/3}} \left(1 + \frac{\theta}{4} \frac{m_e c^2}{E_p} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\frac{2}{3}}}} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

in cui si è proceduto con una derivazione in \bar{R} , variabile a cui è poi stata sostituita la soluzione trovata nella (4.15). Questa sostituzione è la ragione per cui la soluzione corretta apparirà divergere nel limite di Chandrasekhar. E' possibile, ora, ricostruire la deformazione della soluzione classica per \bar{R} come nel caso non relativistico:

$$\frac{y}{\Delta X} \simeq 3 \left(\bar{M}^{1/3} \sqrt{1 - \frac{K'}{K} \bar{M}^{2/3}} \right)^2,$$

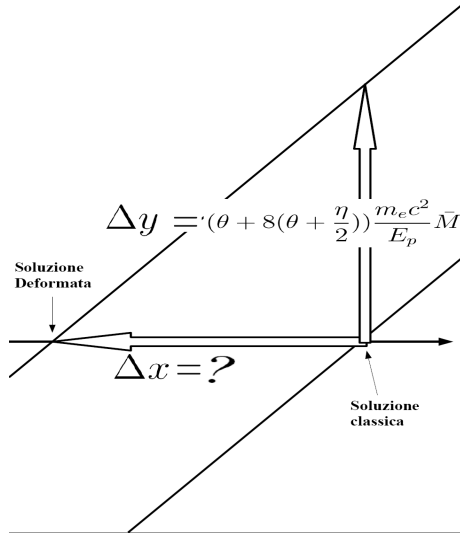


Figura 4.4: Particolare dell'effetto di una traslazione verso l'alto della retta a cui è stata approssimata la curva delle soluzioni, la figura vorrebbe mostrare che, per una traslazione verso l'alto data, si possa giungere a quantificare la corrispettiva traslazione a sinistra, attraverso la conoscenza del coefficiente angolare della retta.

in cui è stato preso in considerazione solamente il contributo più importante in \bar{R} , trascurando il termine al primo ordine, mentre le correzioni proporzionali a $\frac{m_e c^2}{E_p}$ sono state omesse poichè nella formula del raggio avrebbero contribuito solo per ordini di $\frac{1}{E_p}$ superiori al primo. A questo punto è possibile ottenere la nuova formula per il raggio:

$$\bar{R} = \bar{M}^{1/3} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_0}\right)^{2/3} - \left(\theta + 8\left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)\right) \frac{m_e c^2}{E_p} \frac{\bar{M}^{1/3}}{3\left(1 - \left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_0}\right)^{2/3}\right)}} \quad (4.17)$$

che risulta conveniente riscrivere mettendo in evidenza il risultato classico che viene denotato con R_{Chan} :

$$R = R_{Chan} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\theta + 8\left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)\right) \frac{m_e c^2}{E_p} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_0}\right)^{2/3}\right)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (4.18)$$

Nel caso non relativistico, osservando la (4.11) in cui il termine di deformazione planckiana alla formula classica del raggio ha un andamento lineare al crescere della massa, mentre la soluzione classica va come $\bar{M}^{-\frac{1}{3}}$, può sembrare che gli effetti derivanti dalla quantizzazione dello spazio-tempo possano, al crescere della massa, assumere un peso via via maggiore, fino a competere con le soluzioni classiche. Tutto ciò non avviene, poichè la soluzione non relativistica ha consistenza solo in un regime di massa inferiore ad una massa solare, pertanto gli effetti previsti per la formula del raggio, seppur macroscopici in quanto di parecchi ordini di grandezza superiori a L_p , non sono sufficientemente pesanti da risultare testabili.

Nel limite ultrarelativistico, invece, la correzione al raggio riportata nella (4.18), apparentemente rappresenta un'importante novità, in quanto il comportamento asintotico che ha per $M \rightarrow M_0$ potrebbe fungere da forte amplificatore per il termine planckiano, nonostante il coefficiente $\frac{m_e c^2}{E_p}$ sia dell'ordine di $\sim 10^{-22}$. Il comportamento singolare di tale soluzione, quindi, potrebbe portare alla manifestazione palesemente macroscopica di effetti alla scala di Planck, manifestazione molto importante nell'ottica di un confronto con i dati sperimentali ottenuti dall'osservazione di eventuali oggetti astrofisici con massa prossima al limite di Chandrasekhar.

Due nuvolette, però, oscurano il limpido orizzonte di questo scenario, la prima origina dal procedimento di approssimazione, ampiamente riportato nelle pagine precedenti, dal quale si è derivata la (4.18). Esso si basa, infatti, sulla deformazione della formula del raggio in un regime in cui i termini correttivi sono molto piccoli. Quest'analisi, quindi, potrebbe non potersi applicare nel limite in cui detti termini correttivi inizino ad assumere una certa consistenza.

Il secondo problema ha, invece, carattere meramente fisico, infatti, pur ammettendo che la divergenza della soluzione sia matematicamente consistente, tale effetto sorge in un regime in cui il modello di Chandrasekhar inizia a

perdere attinenza con la fisica del sistema, in quanto per $M \rightarrow M_0$ le interazioni deboli non sono più trascurabili, ed il sistema non può essere più descritto solamente come un gas degenere di elettroni.

Per evidenziare l'ordine di grandezza in cui il comportamento delle diverse soluzioni diverge, è opportuno riportare su grafico l'andamento del raggio in funzione non più di M , bensì di $(M_{Chan} - 5 \cdot 10^{-14} M_\odot) + \epsilon$, cosicchè facendo variare il parametro ϵ da zero a $5 \cdot 10^{-14} M_\odot$, si osserva con grande precisione quanto prossimo al limite di Chandrasekhar sia il valore della massa per il quale le soluzioni deformate iniziano a divergere dal caso classico.

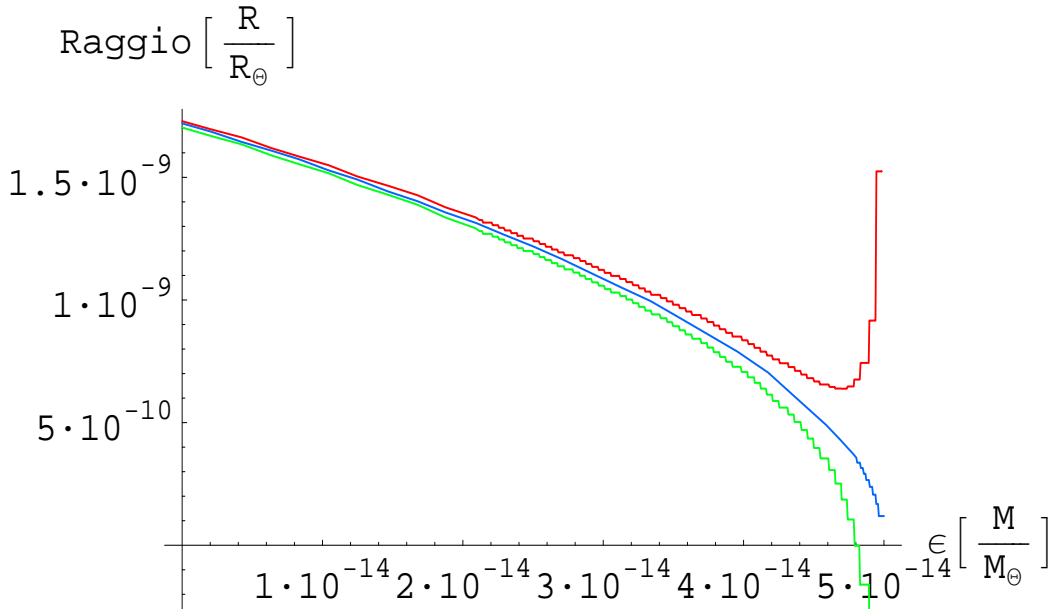


Figura 4.5: Raggio in funzione della ϵ , nei grafici dell'andamento raggio-massa, in cui alla massa è stata sostituita $(M_{Chan} - 5 \cdot 10^{-14} M_\odot) + \epsilon$, sull'asse delle ascisse le unità di misura sono M/M_\odot e sull'asse delle coordinate R/R_\odot . In blu è rappresentata la curva di Chandrasekhar con al posto della massa $(M_{Chan} - 5 \cdot 10^{-14} M_\odot) + \epsilon$, mentre in verde ed in rosso sono graficate rispettivamente la curva corretta con coefficiente del termine correttivo positivo ($\theta = 3$ e $\eta = 1$) e quella con coefficiente negativo ($\theta = -3$ e $\eta = 1$).

4.1.1 Confronto con analisi precedenti e dati sperimentali

Mentre le considerazioni qui sviluppate in riferimento al caso non relativistico, in presenza di deformazioni planckiane, non hanno precedenti in letteratura, per quel che riguarda il regime ultrarelativistico, l'analisi qui riportata è, per certi aspetti, simile a quella di A. Camacho [7]. Gli obiettivi di tale articolo sono simili a quelli di questo lavoro di tesi, anche se con prospettive, dal punto di vista teorico, meno ampie. L'autore, infatti, introduce nel modello da lui proposto le modifiche alla relazione di dispersione viste nel paragrafo 3.3, senza, però, associarvi alcuna deformazione della misura. Per cui, pur ispirandosi ad uno scenario di deformazione di simmetrie spazio-temporali, in realtà Camacho introduce nel modello una vera e propria rottura delle simmetrie alla scala di Planck. Pur partendo da una base differente, comunque, nell'articolo [7] viene dedotto un comportamento asintotico molto simile a quello della (4.18), comportamento che, però, proprio per via della prospettiva meno ampia dal punto di vista teorico l'autore ipotizza possa spiegare le anomalie nella distribuzione in un grafico raggio/massa delle nane bianche osservate. Nell'articolo si ipotizza oltretutto che, prendendo in considerazione interazioni coulombiane e distribuzioni di densità più realistiche per il gas di elettroni, sia possibile ottenere informazioni sul valore del coefficiente η , avendo alcune stelle raggi significativamente inferiori alle predizioni teoriche [42, 47].

L'attuale situazione delle osservazioni sperimentali, però, spinge ad essere molto meno ottimisti sull'osservazione di effetti quanto-gravitazionali nel comportamento del gas di fermioni. Le osservazioni da terra [41], infatti, danno un'idea molto confusa dell'andamento raggio-massa per le nane bianche, mentre i dati più attendibili in nostro possesso sono quelli di Hipparcos [43, 44, 46] (E.S.A. 1997), una missione satellitare dedicata a precise

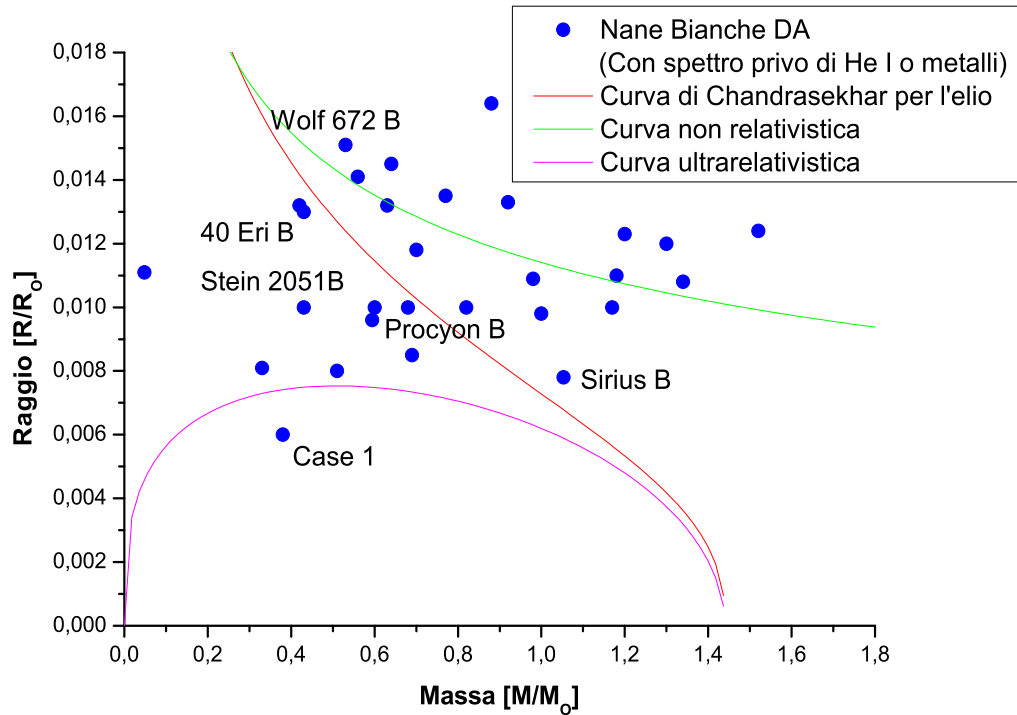


Figura 4.6: Dati sperimentali disponibili prima della missione Hipparcos, ottenuti da misure effettuate da terra. Sono riportate solamente le nane bianche che possono essere confrontate con il modellino semplificato presentato in questo lavoro. I dati sono accompagnati dalle curve teoriche fin qui descritte, per fornire un'idea del confronto tra i modelli e le osservazioni precedenti a misure di parallasse più precise. I punti non sono corredati dagli errori, in quanto riportano dei valori medi di massa e raggio delle nane bianche misurati nel corso di circa un secolo di osservazioni.

misure di posizione e parallasse di 120.000 stelle vicine.

Le misure di Hipparcos forniscono uno scenario molto più confacente al modello di Chandrasekhar di quanto non lo fossero le osservazioni da terra, anche se, come già accennato, alcune stelle sembrano avere raggi molto più

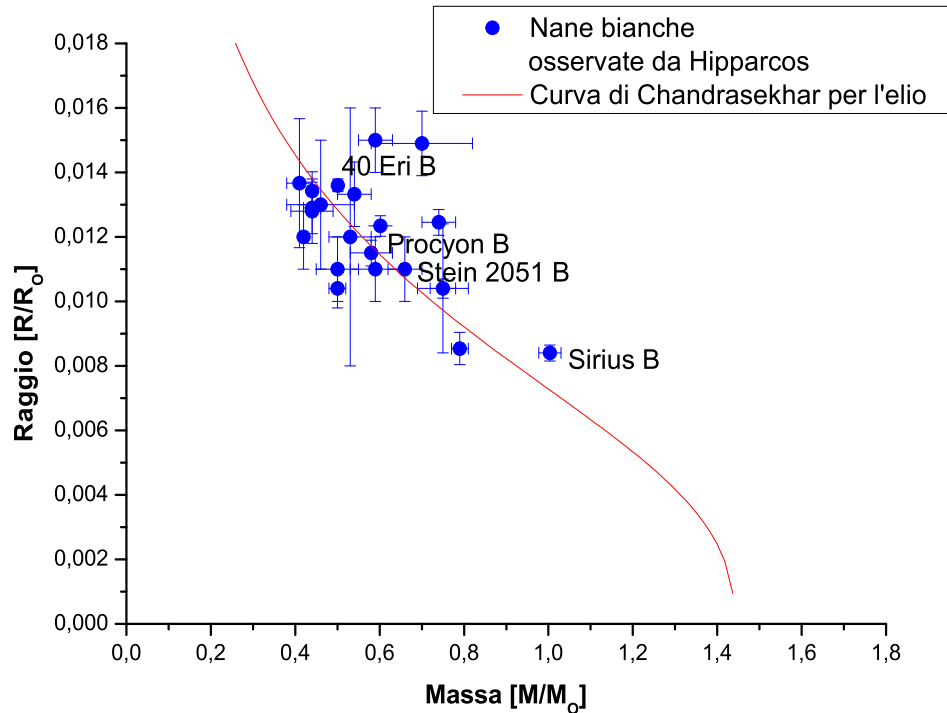


Figura 4.7: La figura riporta i raggi e le masse di alcune nane bianche, ottenuti da calcoli svolti sui dati di parallasse della missione Hipparcos. Sull'asse delle ascisse abbiamo le masse in unità di masse solari, mentre sulle ordinate i raggi delle stelle diviso il raggio del sole. In rosso è rappresentata la curva di Chandrasekhar per l'elio.

piccoli di quanto atteso dalle previsioni teoriche².

Tornando alla (4.18), quindi, si può osservare che la regione in cui la correzione inizia ad avere conseguenze apprezzabili sul raggio non è popolata da dati sperimentali, principalmente per due motivi: il primo è che ad alta densità la capacità termica crolla, e decresce anche il tempo di raffreddamento, per cui è probabile che le nane più antiche, con massa vicina al limite di

²Questa discrepanza ha fatto sospettare molti autori della presenza di materia strana (particelle composte da quark s) all'interno di queste nane, dette *Nane Strane*

Chandrasekhar siano ora rosse o, addirittura, nere [45]; l'altro è l'avvento del fenomeno della neutronizzazione che, molto probabilmente, inizia ad essere consistente già prima del raggiungimento della massa limite.

Le anomalie riscontrate nei dati sperimentali, quindi (sempre che di anomalie si possa parlare, dato che le grandi barre d'errore dei dati non permettono un'analisi molto accurata dell'effettiva distribuzione delle nane bianche nel grafico raggio/massa), sono state studiate in letteratura [42, 43, 44, 46] in regime $x_F \ll 1$. Per cui i limiti dell'articolo [7], non sono circoscritti solamente al non aver introdotto nel modello la deformazione della misura invariante, ma comprendono anche conclusioni piuttosto improbabili dal punto di vista fenomenologico, in quanto non è possibile addurre al comportamento asintotico della soluzione (4.18) per il raggio, che si ottiene limitatamente a regimi ultrarelativistici, le eventuali anomalie che si hanno nel caso non relativistico nei raggi delle nane bianche.

Le congetture presentate in [7] sono state un punto di partenza per questo lavoro di tesi, ma, date le premesse deboli su cui tale articolo fonda, è stata necessaria un'analisi più attenta per rendere più rigorosa l'analisi di questi fenomeni. Per questo motivo oltre che riaffrontare il calcolo nel caso $x_F \gg 1$, si è reso necessario anche lo studio del caso non relativistico.

4.2 Modifiche al modello Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

Le caratterizzazioni delle modifiche del modello di Chandrasekhar ispirate da studi di quantizzazione dello spazio-tempo, che è stata qui data nel paragrafo 4.1, ha portato a risultati incoraggianti per l'idea generale di poter avere manifestazioni macroscopiche di effetti introdotti alla scala di Planck, anche se, nel caso specifico del modello di Chandrasekhar, queste manifes-

tazioni non sono testabili sperimentalmente.

Alla luce di quell'analisi può essere interessante considerare altri modelli in cui tali manifestazioni macroscopiche potrebbero verificarsi, anche sperando eventualmente di trovare un esempio di manifestazione macroscopica di effetti planckiani in un regime davvero accessibile all'osservazione sperimentale.

Come primo passo di quest'esplorazione di modelli ispirata dagli esiti di quest'analisi del modello di Chandrasekhar, in questo paragrafo viene analizzato il modello T.O.V., seguendo la stessa strategia messa in atto nel paragrafo 4.1 per il modello di Chandrasekhar.

Il modello T.O.V., come discusso in dettaglio nel primo capitolo, descrive un gas di fermioni in presenza di curvatura dello spazio-tempo, attraverso la soluzione delle equazioni di Einstein in presenza di materia. Questo modello va quindi visto come un miglioramento dei modelli di Chandrasekhar e Landau, che, invece, descrivono gli effetti gravitazionali esclusivamente tramite potenziali newtoniani. Le considerazioni dal punto di vista della meccanica statistica sono, però, analoghe e quindi non si incontrano particolari difficoltà concettuali nell'adattare la struttura di descrizione di effetti ispirati dalla quantizzazione dello spazio-tempo, qui già proposta nel paragrafo 4.1. In particolare per la pressione e per la densità d'energia del gas di fermioni, è legittimo adottare anche in questo caso le formule deformate (4.2),(4.4):

$$\begin{aligned}\rho(x_F) &= \frac{Q}{8} \left(x_F(1 + 2x_F^2)\sqrt{1 + x_F^2} - \ln(x_F + \sqrt{1 + x_F^2}) + 8\frac{m_f c^2}{E_p} \left((\theta + \frac{\eta}{2})x_F^5 + \theta x_F^3 \right) \right) \\ P_0(x_F) &= \frac{Q}{8} \left(x_F \left(\frac{3}{2}x_F^2 - 1 \right) \sqrt{1 + x_F^2} + \ln(x_F + \sqrt{1 + x_F^2}) + \frac{16}{3} \frac{m_f c^2}{E_p} \left(\theta + \frac{\eta}{2} \right) x_F^5 \right),\end{aligned}$$

in cui in cui $Q = \frac{m_f^4 c^5}{\pi^2 h^3}$ e x_F è stato definito in (1.14). Passando da x_F , alla variabile adimensionale t (già introdotta nel primo capitolo), è possibile riesprimere le (1.27) del modello T.O.V. classico, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Q}{32} \left\{ (\sinh(t) - t) + 32 \frac{m_f c^2}{E_p} \left((\theta + \frac{\eta}{2}) \left(\frac{1}{16} \sinh(\frac{5}{4}t) - \frac{5}{16} \sinh(\frac{3}{4}t) + \frac{5}{8} \sinh(\frac{t}{4}) \right) \right) \right\} + \\ &+ \frac{Q}{32} \left\{ 32 \frac{m_f c^2}{E_p} \theta \left(\frac{1}{4} \sinh(\frac{3}{4}t) + \frac{3}{4} \sinh(\frac{t}{4}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{Q}{96} \left(\sinh(t) - 8 \sinh(\frac{t}{2}) + 3t \right) + \\ &+ \frac{Q}{96} \left\{ \frac{4}{3} \frac{m_f c^2}{E_p} (\theta + \frac{\eta}{2}) \left(\sinh(\frac{5}{4}t) - 5 \sinh(\frac{3}{4}t) + 10 \sinh(\frac{t}{4}) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

A partire da queste ridefinizioni il sistema di equazioni differenziali (1.29), diviene:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \frac{Q}{32} \left\{ (\sinh(t) - t) + 32 \frac{m_f}{E_p} \left((\theta + \frac{\eta}{2}) \left(\frac{1}{16} \sinh(\frac{5}{4}t) - \frac{5}{16} \sinh(\frac{3}{4}t) + \frac{5}{8} \sinh(\frac{t}{4}) \right) \right) \right\} + \\ &+ \frac{Q}{32} \left\{ 32 \frac{m_f}{E_p} \theta \left(\frac{1}{4} \sinh(\frac{3}{4}t) + \frac{3}{4} \sinh(\frac{t}{4}) \right) \right\} \\ \frac{dt}{dr} &= \frac{-4}{r(r-2m)} \frac{\sinh(t) - 2 \sinh(\frac{t}{2}) + \frac{5}{3} (\theta + \frac{\eta}{2}) \frac{m_f}{E_p} (\sinh(\frac{5}{4}t) - 5 \sinh(\frac{3}{4}t) + 10 \sinh(\frac{t}{4}))}{\cosh(t) - 4 \cosh(\frac{t}{2}) + 3 + (\theta + \frac{\eta}{2}) \frac{m_f}{E_p} (5 \cosh(\frac{5}{4}t) - 15 \cosh(\frac{3}{4}t) + 10 \cosh(\frac{t}{4}))} \times \\ &\times \left\{ 4\pi \frac{Q}{96} \left\{ \sinh(t) - 8 \sinh(\frac{t}{2}) + 3t + \frac{4}{3} \frac{m_f}{E_p} (\theta + \frac{\eta}{2}) \left(\sinh(\frac{5}{4}t) - 5 \sinh(\frac{3}{4}t) + 10 \sinh(\frac{t}{4}) \right) \right\} + \right. \\ &\left. + m(r) \right\} \end{aligned} \right. \quad (4.21)$$

Prima di risolvere questo sistema per $m(r)$ e $t(r)$, è utile di analizzare il contributo che l'aggiunta di termini correttivi alla scala di Planck può dare alla fisica del nostro sistema. Per rendere queste considerazioni più intuitive, si farà riferimento inizialmente al caso del modello di Landau.

Inserendo le correzioni nel modello di Landau, a partire dalla (1.18), si

ottiene:

$$E(R) = p_F \left(1 + \left(\frac{\eta}{2} - \frac{\theta}{4} \right) \frac{m_f}{E_p} p_F \right) - \frac{GMm_f}{R}$$

e quindi, esplicitando l'impulso di Fermi:

$$E(R) = (3\pi^2 N)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{R} + \left(\frac{\eta}{2} - \frac{\theta}{4} \right) \frac{m_f}{E_p} (3\pi^2 N)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{R^2} - \frac{GMm_f}{R}. \quad (4.22)$$

Dalla (4.22) si osserva che man a mano che il raggio diviene più piccolo, i termini correttivi proporzionali a $1/E_p$ divengono via via più importanti. Nel momento in cui si imponga la condizione d'equilibrio $E = 0$, tale termine correttivo assume, per oggetti di una massa solare un peso importante quando il raggio è dell'ordine di $R \sim 10^{-17}m$, nel caso in cui si prenda in considerazione un gas di neutroni, mentre solamente $10^{-19}m$ per quel che riguarda un gas di elettroni. Sulla base di queste considerazioni sembrerebbe più promettente sviluppare una fenomenologia di effetti alla scala di Planck in stelle di neutroni, piuttosto che in nane bianche. Naturalmente non è realistico pensare di osservare oggetti di una massa solare con un raggio di $\sim 10^{-17}m$, ma lo studio del modello T.O.V. in condizioni di alta densità d'energia, che viene qui riportato, consente comunque di acquisire una prospettiva un po' più ampia del tipo di contesti in cui effetti planckiani potrebbero avere manifestazioni macroscopiche. Va sottolineato che un raggio di $10^{-17}m$ pur essendo troppo microscopico dal punto di vista dell'osservabilità, è comunque sorprendentemente macroscopico rispetto alla scala a cui sono riprodotti gli effetti (la lunghezza di Planck è infatti $L_p \sim 10^{-35}m$).

Tornando alla soluzione del sistema (4.21) è utile riconoscere le semplificazioni che emergono per $t \gg 1$, ed esprimendo, come nel caso classico,

tutto nelle unità (1.31), (1.32) ponendo quindi $Q = 32/4\pi$ si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = \frac{1}{2}r^2 \left(e^t + 2\left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)\frac{m_f}{E_p}e^{\frac{5}{4}t} \right) \\ \frac{dt}{dr} = -\frac{1}{r(r-2m(r))} \frac{\frac{4}{6}e^t + \frac{5}{6}\left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)\frac{m_f}{E_p}e^{\frac{5}{4}t}}{\frac{1}{6}e^t + \frac{4}{6}\left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)\frac{m_f}{E_p}e^{\frac{5}{4}t}} \left(\left(\frac{1}{6}e^t + \frac{4}{6}\left(\theta + \frac{\eta}{2}\right)\frac{m_f}{E_p}e^{\frac{5}{4}t}\right) r^3 + m(r) \right) \end{cases} \quad (4.23)$$

A questo punto è necessario introdurre la ridefinizione dell'impulso di Fermi del sistema (3.36), analogamente a quanto già fatto nel caso delle nane bianche in (4.9):

$$x_F \rightarrow x_F \left(1 - \frac{\theta m_f}{4 E_p} x_F\right),$$

in cui si è deformata la formula per poter interpretare x_F secondo la definizione classica. Le conseguenze sulla variabile t sono:

$$\begin{aligned} t = 4 \ln \left(x_F + \sqrt{1 + x_F^2} \right) &\rightarrow 4 \ln \left(x_F \left(1 - \frac{\theta m_f}{4 E_p} x_F\right) + \sqrt{1 + x_F^2 \left(1 - 2\frac{\theta m_f}{4 E_p} x_F\right)} \right) \simeq \\ &\simeq t - \theta \frac{m_f}{E_p} \frac{x_F}{\sqrt{1 + x_F^2}} = t - \theta \frac{m_f}{E_p} \frac{\sinh^2\left(\frac{t}{4}\right)}{\cosh\left(\frac{t}{4}\right)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Di conseguenza nel limite $t \gg 1$ potendo ora interpretare t in senso classico, si ha:

$$e^t \rightarrow e^{\left(t - \frac{\theta m_f}{2 E_p} e^{\frac{t}{4}}\right)} \simeq e^t \left(1 - \frac{\theta m_f}{2 E_p} e^{\frac{t}{4}}\right)$$

e

$$\frac{dt}{dr} \rightarrow \frac{dt}{dr} \left(1 - \frac{\theta m_f}{8 E_p} e^{\frac{t}{4}}\right).$$

Il sistema (4.23) con queste nuove definizioni diviene:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = \frac{1}{2}r^2 \left(e^t + \left(\frac{3}{2}\theta + \eta\right) \frac{m_f}{E_p} e^{\frac{5}{4}t} \right) \\ \frac{dt}{dr} = -\frac{1}{r(r-2m(r))} \frac{\frac{4}{6}e^t + \frac{1}{2}(\theta + \frac{5}{6}\eta) \frac{m_f}{E_p} e^{\frac{5}{4}t}}{\frac{1}{6}e^t + \frac{1}{3}(\frac{7}{6}\theta + \eta) \frac{m_f}{E_p} e^{\frac{5}{4}t}} \left(\left(\frac{1}{6}e^t + \left(\frac{5}{4}\theta + \frac{2}{3}\eta\right) \frac{m_f}{E_p} e^{\frac{5}{4}t}\right) r^3 + m(r) \right) \times \\ \times \left(1 + \frac{\theta}{8} \frac{m_f}{E_p} e^{\frac{1}{4}t}\right) \end{cases} \quad (4.25)$$

Sviluppando per $\frac{m_f}{E_p} \sim 0$, trascurando i termini al secondo ordine e le potenze di e^t di ordine inferiore al primo, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = \frac{1}{2}r^2 e^t + \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{3}{2}\theta + \eta\right) \frac{m_f}{E_p} e^{\frac{5}{4}t} \\ \frac{dt}{dr} = -\frac{4}{r(r-2m(r))} \left(\frac{r^3}{6} e^t + m(r) \right) - \frac{r^3}{r(r-2m(r))} \left(\frac{23}{9}\theta + \frac{7}{4}\right) \frac{m_f}{E_p} e^{\frac{5}{4}t} \end{cases} \quad (4.26)$$

La conoscenza delle soluzioni analitiche del sistema (1.30), che sono soluzioni del sistema (1.22) per $E_p \rightarrow 0$ porta a cercare soluzioni della forma:

$$e^{t(r)} = \frac{3}{7} \frac{1}{r^2} + \phi(r) \quad m(r) = \frac{3}{14}r + \chi(r),$$

utilizzando il metodo delle perturbazioni.

Sostituendo, quindi, le soluzioni appena proposte nel sistema (4.26), si ha:

$$\begin{cases} \frac{d\chi(r)}{dr} = \frac{1}{2}r^2 \phi(r) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{3}{2}\theta + \eta\right) \frac{m_f}{E_p} r^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{\chi(r)}{r^4} - \frac{7}{3} \frac{\phi(r)}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{23}{9}\theta + \frac{7}{4}\eta\right) \frac{m_f}{E_p} r^{-\frac{7}{2}} \end{cases} \quad (4.27)$$

Per risolvere il sistema si procede nella seguente maniera: si esplicita ϕ in funzione di χ , a partire dalla prima equazione:

$$\phi(r) = \frac{2}{r^2} \frac{d\chi(r)}{dr} - \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{3}{2}\theta + \eta\right) \frac{m_f}{E_p} r^{-\frac{5}{2}}, \quad (4.28)$$

e la si sostituisce nella seconda, ottenendo l'equazione differenziale di secondo ordine lineare a coefficienti variabili:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{r^3} \frac{d\chi(r)}{dr} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^4} \chi(r) = -a(\theta, \eta) \frac{m_f}{E_p} r^{-\frac{7}{2}}, \quad (4.29)$$

in cui:

$$a(\theta, \eta) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{3}{2}\theta + \eta\right) + \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{23}{9}\theta + \frac{7}{4}\eta\right) \right).$$

La (4.29) ammette soluzioni del tipo:

$$\chi(r) = zr^{\frac{1}{2}},$$

con:

$$z = \frac{12}{7} a(\theta, \eta) \frac{m_f}{E_p}.$$

A questo punto, esplicitando la soluzione per $\chi(r)$ nella (4.28) è possibile ottenere la soluzione per $\phi(r)$:

$$\phi(r) = kr^{-\frac{5}{2}},$$

in cui

$$k = z - \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{3}{2}\theta + \eta\right) \frac{m_f}{E_p}.$$

E' possibile, a questo punto, esprimere le soluzioni perturbate del sistema (4.26) nel modo seguente:

$$e^{t(r)} = \frac{3}{7} \frac{1}{r^2} + \frac{m_f}{E_p} \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{884}{441}\theta + \frac{271}{196}\eta\right) r^{-\frac{5}{2}} \quad (4.30)$$

$$m(r) = \frac{3}{14}r + \frac{m_f}{E_p} \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2335}{882}\theta + \frac{335}{196}\eta\right) r^{\frac{1}{2}}. \quad (4.31)$$

Per avere ora informazioni sul comportamento del sistema in esame, è utile osservare l'andamento della massa in funzione della densità centrale $m(\rho)$. Per stabilire questa dipendenza funzionale sono necessari alcuni passi di analisi delle (4.30) e (4.31).

Il primo passo porta a riconoscere che dalla (4.30) è possibile esplicitare $r(t)$:

$$r(t) \simeq \sqrt{\frac{3}{7}} e^{-\frac{t}{2}} \left(1 + \frac{7}{6} \frac{m_f}{E_p} \left(\frac{884}{441}\theta + \frac{271}{196}\eta\right) e^{\frac{t}{4}}\right) \quad (4.32)$$

Quindi si sostituisce $r(t)$ all'interno della (4.31), ottenendo:

$$m(t) \simeq \frac{3}{14} \sqrt{\frac{3}{7}} e^{-\frac{t}{2}} \left(1 + \frac{7}{3} \frac{m_f}{E_p} \left(\frac{2777}{441}\theta + \frac{1611}{392}\eta\right) e^{\frac{t}{4}}\right) \quad (4.33)$$

A questo punto considerando la (4.19) e la (4.24), si arriva alla formula deformata della densità centrale come funzione della variabile adimensionale t , per $t \gg 1$:

$$\rho(t) \simeq \frac{1}{2} e^t \left(1 + \frac{m_f}{E_p} \left(\frac{3}{2}\theta + \eta\right) e^{\frac{t}{4}}\right),$$

da cui è possibile ricavare la dipendenza di e^t rispetto a ρ :

$$e^t \simeq 2\rho \left(1 - 2^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{2}\theta + \eta\right) \frac{m_f}{E_p} \rho^{\frac{1}{4}}\right) \quad (4.34)$$

Si arriva, quindi, all'espressione di m in funzione della densità centrale,

deformazione della (1.35), esplicitando la (4.34) nella (4.33):

$$m(\rho) \simeq \left(\frac{3}{14}\right)^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{m_f}{E_p} f(\theta, \eta) \rho^{\frac{1}{4}}\right) \quad (4.35)$$

in cui la $f(\theta, \eta)$ è:

$$f(\theta, \eta) = \frac{7}{3} \left(\frac{2777}{441} \theta + \frac{1611}{392} \eta \right) + 2^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{2} \theta + \eta \right).$$

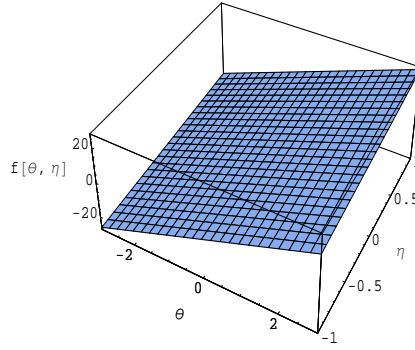


Figura 4.8: Andamento della $f(\theta, \eta)$ al variare dei parametri θ ed η .

Studiando la (4.35) si può osservare come, a seconda dei valori assunti da $f(\theta, \eta)$ sia possibile prevedere due tipi di comportamento: per f positivi si ha un incremento di m al crescere della densità centrale, con un conseguente addolcimento dell'instabilità del sistema, mentre per f negativi, è possibile trovare un valore massimo della densità centrale oltre al quale non esistono più soluzioni per la massa:

$$\rho = \left(\frac{1}{f(\theta, \eta)} \frac{E_p}{m_f} \right)^4 \sim 3.5 \cdot 10^{71}. \quad (4.36)$$

Tale valore della densità centrale corrisponde ad impulsi di Fermi ($p_F \sim 10^{26} eV$) molto vicini all' impulso di Planck, regime in cui, come visto nel terzo capitolo dovrebbero iniziare ad essere consistenti eventuali effetti dovuti a deformazioni di simmetria alla scala di Planck.

E' importante notare come a tale densità centrale ed a tale impulso di Fermi, per oggetti di $M \sim 1M_\odot$, corrisponda un raggio di $\sim 10^{-15}m$, che, pur essendo ancora troppo piccolo per far sì che tali oggetti siano osservabili, è comunque $\sim 10^{20}L_p$. Si può, inoltre, osservare che il modello T.O.V., che ha come base la relatività generale, sembra essere più sensibile all'inserimento di modifiche alla scala di Planck del modello di Landau (dove gli effetti planckiani si manifestano alla scala di $10^{-17}m$ piuttosto che $10^{-15}m$) che si basa sulla gravità newtoniana.

Conclusioni

Questo lavoro di tesi esplora la possibilità che effetti ispirati allo studio di scenari di quantizzazione dello spazio-tempo alla scala di lunghezza di Planck, possano manifestarsi macroscopicamente in alcuni sistemi studiati in astrofisica.

L'analisi prende spunto da un articolo di A. Camacho [7] che, sulla base di una descrizione molto preliminare di effetti attribuibili ad una quantizzazione dello spazio-tempo, ipotizzava appunto che, nel contesto del modello di Chandrasekhar per le nane bianche, potessero emergere effetti macroscopici osservabili. Quest'argomento è stato nuovamente esplorato in letteratura in un altro articolo [18] che, però, come Camacho affronta il problema introducendo nel modello più che una deformazione delle simmetrie spazio-temporali, una loro vera e propria rottura.

Il primo obiettivo di questo lavoro di tesi è stato, quindi, quello di formulare in maniera più coerente dal punto di vista logico-matematico, la descrizione dei possibili effetti di quantizzazione dello spaziotempo all'interno del modello di Camacho. Questo ha portato ad identificare numerose inconsistenze della formulazione del modello fenomenologico sviluppato nell'articolo in questione, tra cui particolarmente significativa è la non covarianza del modello stesso, per correggere la quale è stato necessario nel terzo capitolo introdurre una misura non banale per le integrazioni sullo spazio energia-impulso.

Dal punto di vista del confronto con i dati sperimentali nel capitolo 4 si è evidenziato come, sebbene l'analisi di Camacho si fosse limitata a considerazioni applicabili nel limite ultrarelativistico del modello di Chandrasekar, i dati usati nell'articolo per argomentarne l'osservabilità, si riferissero a stelle la cui densità non giustifica una descrizione in questo regime, mentre risulta necessario uno studio più approfondito del limite non relativistico del modello. Si è quindi considerata la modifica a scala di Planck del modello di

Chandrasekhar sia nel regime ultrarelativistico che in quello non relativistico. Questo ha effettivamente consentito di evidenziare effetti sorprendentemente macroscopici rispetto alle minute dimensioni della lunghezza di Planck, ma si e' anche verificato, contrariamente a quanto ipotizzato da Camacho, l'impossibilità di un confronto con i dati sperimentali, non esistendo nane bianche nel regime in cui gli effetti insorgono.

La strategia di descrizione di effetti riconducibili ad una quantizzazione dello spazio-tempo, applicata con questi esiti al modello di Chandrasekhar, e' stata anche generalizzata in modo da essere applicabile al piu' complesso modello di Tolman-Oppenheimer-Volkoff, che adotta una descrizione general-relativistica degli aspetti gravitazionali del problema (mentre il modello di Chandrasekhar si limita ad una descrizione Newtoniana).

Anche nella analisi del modello di Tolman-Oppenheimer-Volkoff si sono trovati effetti sorprendentemente macroscopici rispetto alla lunghezza di Planck, ma comunque troppo piccoli per una verifica sperimentale.

L'esplorazione di effetti planckiani nell'ambito delle stelle compatte qui riportata, fornisce, però, numerosi spunti per lo sviluppo di una fenomenologia di questi effetti. La fenomenologia alla scala di Planck presente in letteratura, infatti, si concentra sullo studio di sistemi che presentano sia meccanismi di amplificazione degli effetti (distanze cosmiche, un gran numero di particelle), sia fenomeni molto sensibili a piccole deformazioni (soglie, limiti). Le stelle compatte, per loro stessa natura soddisfano il primo requisito, mentre la sensibilità agli effetti planckiani potrebbe ottenersi studiando sistemi complessi di gas di fermioni diversi all'equilibrio, basandosi sulle deformazioni introdotte nel capitolo 3, nell'analisi di un sistema fermionico.

Le condizioni d'equilibrio come ad esempio:

$$\sqrt{m_f^2 + p_{Ff}^2} = \sqrt{m_{f1}^2 + p_{Ff1}^2} + \dots + \sqrt{m_{fn}^2 + p_{Ffn}^2},$$

potrebbero essere in alcuni casi soddisfatte, nel caso si introducano nel modello relazione di dispersione modificata e ridefinizione dell'impulso di Fermi, da soluzioni anche significativamente differenti dal caso classico.

Su queste basi, sebbene le indicazioni emergenti in queste pagine in alcuni casi siano forse affidabili solo al livello qualitativo, è però possibile fornire alcune motivazioni per ulteriori investigazioni nella direzione indicata da questo lavoro di tesi.

Bibliografia

- [1] *Nineteenth-century clouds over the dynamical theory of heat and light* W. Thompson (The London Edinburg and Dublin philosophical magazine and journal of science, Series 6, Volume 2, Page 1 (1901))
- [2] *Quantum-Gravity phenomenology: status and prospects* G. Amelino-Camelia (Mod. Phys. Lett. A 17, Issue 15/17, pp. 899-922 (2002) - arXiv: gr-qc/0204051v1 (15 Apr 2002))
- [3] *Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena, and astrophysical constraints* T. Jacobson, S. Liberati (Annals of Physics, Volume 321, Issue 1, Pages 150-196 (January 2006))
- [4] *Are we at the dawn of quantum-gravity phenomenology?* G. Amelino-Camelia (Lecture Notes in Physics, Volume 541, pp. 1-49 (2000) - arXiv: gr-qc/9910089 v1 (25 Oct 1999))
- [5] *Nonstandard optics from quantum space-time* R. Gambini J. Pullin (Phys. Rev. D 59, 124021 (May 1999))
- [6] *Planck-scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the ultrahigh energy cosmic ray and TeV photon paradoxes*, G. Amelino-Camelia, T. Piran (Physical Review D, Volume 64, 036005 - arXiv:astro-ph/0008107v1 (7 Aug 2000))

- [7] *White dwarfs as test objects of Lorentz violations* A. Camacho (Classical and Quantum Gravity Volume 23, Number 24, pp. 7355-7368 (Dicember 2006) - arXiv:gr-qc/0610073v1 (13 Oct 2006))
- [8] G. Gamov, D. Ivanenko, L. Landau (Zh. Russ. Fiz. Khim. Obstva. Chatst'Fiz.,60:13 (1928))
- [9] *The fundamental constants of physics* L. B. Okun (Sov. Phys. Usp. 34:818 (1991))
- [10] *Dialogue on the number of fundamental constants* M. J. Duff, L. B. Okun, G. Veneziano (JHEP 03, 023 (2002), arXiv:physics/0110060v3 [physics. class-ph] (Sept 2002))
- [11] *Effect of inhomogeneity on cosmological models* R. C. Tolman (Proceedings of the National Accademy of Sciences of the United States of America, Vol 20, no 3, pp. 169-176 (March 1934))
- [12] *On massive neutron cores* J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff (Phys. Rev. Volume 55, Issue 4, pp. 374-381 (February 1939))
- [13] *Advanced stellar astrophysics* W. K. Rose (Cambridge University Press (1998))
- [14] *Meccanica statistica* K. Huang (Zanichelli (1997))
- [15] *Principles of Stellar Dynamics* S. Chandrasekhar (Dover Pubblications, New York (2005))
- [16] L. Landau (Physik. Zeits Sowjetunion 1, 285 (1932))
- [17] *Compact stars made of fermionic dark matter* G. Narain, J. Shaffner-Bielich, I. N. Mishustin (Phys. Rev. D74:063003 (2006), arXiv:astro-ph/0605724v2 (Sep 2006))

- [18] *On Modified Dispersion Relation and the Chandrasekhar Mass Limit* M. Gregg, S. A. Major (arXiv:0806.3496v2 [astro-ph] (15 Nov 2008))
- [19] *Compact Stars* N. K. Glendenning (Springer (2000))
- [20] *Bicross product structure of κ -Poincaré group and non-commutative geometry* S. Majid, H. Ruegg (Phys. Lett. B 334, pp. 348 (1994))
- [21] *Observer-independent quanta of mass and length* J. Kowalski-Glikman (Phys. Lett. A286 pp. 391 (2001), arXiv:hep-th/0102098)
- [22] *Deformed boost transformations that saturate at the Planck scale* R. Bruno, G. Amelino-Camelia and J. Kowalski-Glikman (Phys. Lett. B 522, pp. 133 (2001), arXiv:hep-th/0107039)
- [23] *Lorentz invariance with an invariant energy scale* J. Magueijo and L. Smolin (Phys. Rev. Lett. 88, 190403 (2002), arXiv:hep-th/0112090)
- [24] *Relativity in spacetimes with short-distances structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale* G. Amelino-Camelia (Int. J. Mod. Phys. D 11, pp. 35 (2002), arXiv:gr-qc/0012051)
- [25] *Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale* J. Magueijo, L. Smolin (Phys. Rev. D 67, 044017 (2003), arXiv:gr-qc/0207085)
- [26] *Doubly Special Relativity: first results and key open problems* G. Amelino-Camelia (Int. J. Mod. Phys. D11, pp. 1643 (2002), arXiv:gr-qc/0210063v1 (Oct 2002))
- [27] *Testable scenario for Relativity with minimum-length* G. Amelino-Camelia (Phys. Lett. B 510, pp. 255 (2001), arXiv:hep-th/0012238)
- [28] *Comparison of relativity theories with observer-independent scales of both velocity and length/mass* G. Amelino-Camelia, D. Benedetti, F.

- D'Andrea, A. Procaccini (Class. Quant. Grav. 20, pp. 5353-5370 (2003), arXiv:hep-th/0201245v2 (Oct 2003))
- [29] *Quantization of point particles in 2+1 dimensional gravity and space-time discreteness* G.'t Hooft (Class. Quant. Grav., 13:1023 (1996), arXiv:gr-qc/9601014)
- [30] *On the fate of Lorentz symmetry in loop quantum gravity and non-commutative space-times* G. Amelino-Camelia (arXiv:gr-qc/0205125 (2002))
- [31] *Undeformed (additive) energy conservation law in Doubly Special Relativity* G. Mandanici (arXiv:0707.3700v1 [gr-qc] (25 Jul. 2007))
- [32] *Affine Lie algebras and quantum groups* J. Fuchs (Cambridge university press (1992))
- [33] *Foundations of quantum group theory* S. Majid (Cambridge university press (2000))
- [34] *Doubly Special Relativity theories as different bases of κ -Poincaré algebras* J. Kowalski-Glikman, S. Nowak (Phys. Lett., B539:126-132 (2002), arXiv:hep-th/0203040)
- [35] *Deformazione dell'algebra di Poincaré alla scala di Planck* D. Benedetti (tesi di laurea, La Sapienza, anno 2001-2002)
- [36] *Conservation Laws in Doubly Special Relativity* S. Judes, M. Visser (Phys. Rev. D 68, 045001 (2003) - arXiv:gr-qc/0205067v3 (16 May 2003))
- [37] *Waves on noncommutative spacetime and gamma-ray bursts* G. Amelino-Camelia, S. Majid (Int. J. Mod. Phys A 15, pp.4301-4324 (2000), arXiv:hep-th/9907110v1 (Jul 1999))

- [38] *Doubly special quantum and statistical mechanics from quantum kappa-Poincare algebra* J. Kowalski-Glikman (Physics Letters A, Volume 299, Issue 5-6, pp. 447-453 (July 2002), arXiv:hep-th/0111110v1)
- [39] *Generalizing the Noether theorem for Hopf-algebra space-time symmetries* A. Agostini, G. Amelino-Camelia, M. Arzano, A. Marcianò, R. Altair Tacchi (Mod. Phys. Lett. A22:1779-1786 (2007), arXiv:hep-th/0607221)
- [40] *First results of the Noether theorem for Hopf-algebra space-time symmetries.* G. Amelino-Camelia, G. Gubitosi, A. Marcianò, P. Martinetti, F. Mercati, D. Pranzetti, R. Altair-Tacchi (Prog. Theor. Phys. Suppl. 171:65-78 (2007), arXiv:0710.1219v1 [gr-qc] (5 Oct 2007))
- [41] *Astrophysical data: Planets and Stars.* K. R. Lang (Springer-Verlag (1991))
- [42] *Evidence for White Dwarfs with Strange-Matter Cores* G. J. Matthews, I. S. Suh, N. Q. Lan, K. Otsuki, F. Weber (American Astronomical Society, 199th AAS Meeting, n 27.01; Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 33, p.1350 (2006))
- [43] *Testing the white dwarfs mass-radius relation with HIPPARCOS* J. L. Provençal, L. Shipan, E. Høg, P. Tejl (The Astrophysical Journal, 494:759-767 (1998))
- [44] *Procyon B: outside the iron box* J. L. Provençal, H. L. Shipman, D. Koster, F. Wesemael (The Astrophysical Journal, 568:324-334 (2002))
- [45] *Relativistic Astrophysics v1-Stars and Relativity* T. B. Zeldovich, I. D. Novikov (The university of Chicago press (1983))

- [46] *Analysis of White Dwarfs with Strange-Matter Cores* G. J. Mathews, I.-S. Suh, B. O’Gorman, N. Q. Lan, W. Zech, K. Otsuki, F. Weber (J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 32, pp. 747-759 (2006), arXiv:astro-ph/0604366v1 (Apr 2006))
- [47] *Deformed dispersion relations and the thermodynamics of a photon gas* A. Camacho and A. Macias (Gen. Rel. Grav. 39:1175-1183 (2007), arXiv:gr-qc/0702150v1 (Feb 2007))