Esercizio n. 1

Una sferetta forata (che si comporta come un punto materiale di massa $\boldsymbol{m}$) può scorrere lungo una guida rettilinea scabra. I coefficienti di attrito statico e dinamico tra la sferetta e la guida sono μ_s e μ_d, rispettivamente. Alla sferetta è collegata una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. L'altro estremo della molla (punto O) è fisso e dista $\boldsymbol{d}$ dalla guida. Facendo riferimento al disegno, dunque, il punto O si trova nell'origine del sistema di riferimento (x,y) e la sferetta si muove a x fissato ($x=d$).

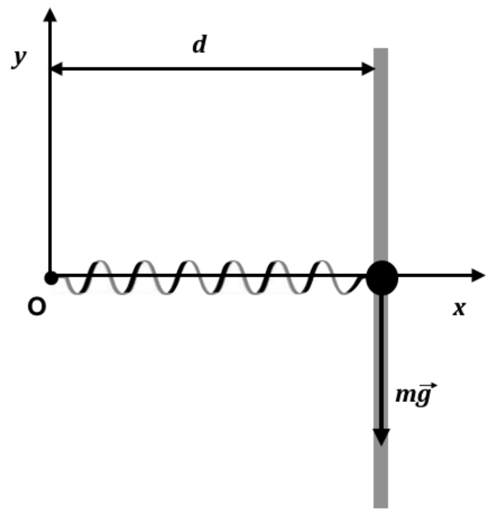
Calcolare:

1. la costante elastica minima (k_{min}) affinchè la sferetta, posta in posizione $y=0$ (rispetto al sistema di riferimento in figura) a velocità nulla, resti in quiete;

Se $k=2k_{min}$ calcolare:

2. l'intervallo delle posizioni y, affinchè la sferetta, posta in esse a velocità nulla, resti in quiete;
3. se $y(t=0)=0$ e $v_y(t=0)=\boldsymbol{v_0}$, la massima quota ($y_{max}$) raggiunta dalla sferetta;
4. Il tempo impiegato dalla sferetta per raggiungere y_{max}.

[$\boldsymbol{m}$ =2.0 kg ; μ_s = 0.25 ; μ_d = 0.20 ; $\boldsymbol{v_0}$ = 1.5 m/s ; $\boldsymbol{d}$ = 30 cm]



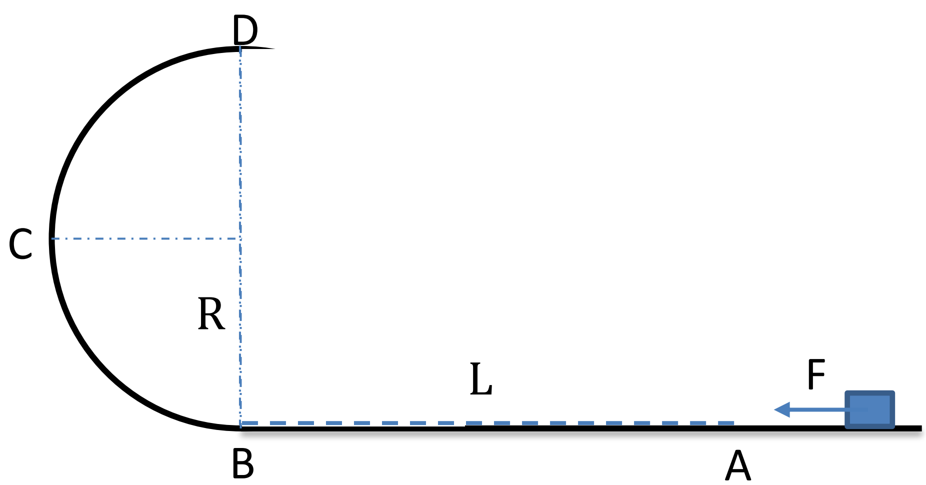
Esercizio n. 2

Ad un corpo di massa $\boldsymbol{M}$ inizialmente in quiete viene applicata una forza $\boldsymbol{F}$ per un breve tempo Δt, diretta come in figura. A seguito di ciò il corpo prende a muoversi nella direzione della forza. Quando giunge in A la forza ha smesso di agire. La massa si muove dapprima su un tratto orizzontale scabro AB di lunghezza $\boldsymbol{L}$ caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico μ_d e quindi su una guida circolare liscia di raggio $\boldsymbol{R}$ saldata nel punto B alla guida orizzontale.

Determinare:

(1) Il modulo della velocità nel punto C indicato in figura
(2) Il valore della reazione vincolare fornita dalla guida nel punto C
(3) Il modulo dell'accelerazione nel punto C
(4) Il valore minimo della forza $\boldsymbol{F_{min}}$ per il quale il corpo raggiunge il punto D senza staccarsi dalla guida

[$\boldsymbol{M}$ = 80 g ; $\boldsymbol{F}$ = 150 N ; Δt = 10 ms ; $\boldsymbol{L}$ = 12 m ; μ_d = 0.30 ; $\boldsymbol{R}$ = 5.0 m]



Soluzione n. 1

(1) Se proiettiamo il secondo principio della dinamica lungo gli assi indicati in figura, otteniamo:

$$\begin{cases} -kd + N = 0 \\ F_a - mg = 0 \end{cases}$$

dove N rappresenta la reazione vincolare normale al piano e F_a la forza di attrito statico. Quindi

$$|F_a| = mg \leq \mu_s N = \mu_s kd$$

Da cui si ottiene

$$k \geq k_{min} = \frac{mg}{\mu_s d} = 262\ N/m$$

(2) Se $y \neq 0$ le stesse equazioni scritte per il punto 1) diventano

$$\begin{cases} -kd + N = 0 \\ -ky + F_a - mg = 0 \end{cases}$$

da cui la forza di attrito deve soddisfare

$$|F_a| = |ky + mg| \leq \mu_s N = \mu_s kd$$

In questo caso il segno di F_a dipende dalla posizione e dobbiamo distinguere i due casi.

Per $F_a \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{mg}{k}$ $\qquad y \leq \mu_s d - mg/k$

Per $F_a < 0 \Rightarrow y < -\frac{mg}{k}$ $\qquad y \geq -\mu_s d - mg/k$

Mettendo insieme le due soluzioni

$$-\mu_s d - mg/k \leq y \leq \mu_s d - mg/k$$
$$-11.2\ cm \leq y \leq 3.7 cm$$

(3) E' possibile rispondere a questa domanda con due metodi.

a) equazione oraria:

Durante il moto di salita la forza di attrito dinamico punta verso il basso e l'equazione del moto è:

$$-ky - \mu_d kd - mg = m\ddot{y}$$

che ha come soluzione generale

$$y = -\mu_d d - \frac{mg}{k} + A\cos(\omega t + \varphi)$$

di pulsazione

$$\omega = \sqrt{k/m} = 16.2\ rad/s$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-v_0}{\left(\frac{mg}{k} + \mu_d d\right)\omega}\right) = -0.76\ rad$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k} + \mu_d d\right)^2 + \frac{{v_0}^2}{\omega^2}} = 13.5 cm$$

La quota massima corrisponde a

$$y_{max} = -\mu_d d - \frac{mg}{k} + A = 3.7\ cm$$

b) lavoro delle forze non conservative:

Uguagliando il lavoro della forza di attrito con la variazione di energia meccanica si ottiene:

$$-\mu_d k d y_{max} = mg y_{max} + \frac{1}{2} k {y_{max}}^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

le due radici sono

$$y_1 = 3.7 cm; 2 = -23.2\ cm$$

e y_{max} corrisponde alla soluzione positiva.

(4) Il tempo si ricava dall'equazione del moto della risposta 3.a)

$$y_{max} = -\mu_d d - \frac{mg}{k} + A cos(\omega t_{max} + \varphi)$$

da cui

$$t_{max} = \frac{\left\{ arccos \left[\frac{\left(y_{max} + \mu_d d + \frac{mg}{k} \right)}{A} \right] - \varphi \right\}}{\omega} = 0.047\ s$$

Soluzione n. 2

(1) Calcoliamo la velocità iniziale utilizzando il teorema dell'impulso:

$$F\Delta t = m v_A \quad v_A = \frac{F\Delta t}{m} = 18.7\ m/s$$

Otteniamo a velocità nel punto C imponendo l'uguaglianza tra il lavoro fatto dalla forza di attrito nel tratto AB e la variazione dell'energia meccanica del corpo tra le posizioni A e C:

$$-\mu_d mgL = \frac{1}{2} m v_C^2 + mgR - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Risolvendo rispetto a v_C otteniamo:

$$v_C = \sqrt{\frac{F^2 \Delta t^2}{m^2} - 2gR - 2\mu_d gL} = 13.5\ m/s$$

(2) La reazione vincolare in C deve compensare la forza centrifuga sperimentata dal corpo in quel punto:

$$N_C = \frac{m v_C^2}{R} = 2.92\ N$$

(3) L'accelerazione in C ha due componenti: quella normale la traiettoria circolare ovvero la componente centripeta e quella tangenziale la traiettoria dovuta alla forza peso. Otteniamo poi il modulo combinando in quadratura le due componenti. Si ha:

$$a_N = \frac{v_C^2}{R} \quad a_T = -g \quad |a| = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} = \sqrt{g^2 + \frac{v_C^4}{R^2}} = 37.8\ m/s^2$$

(4) Affinché il punto sia ancora in contatto con la guida in D, la reazione vincolare della guida in quella posizione deve essere diretta verso il basso. Perché questo avvenga deve essere:

$$N_D = \frac{mv_D^2}{R} - mg > 0 \quad v_D^2 > gR$$

Esprimendo la velocità nel punto D in funzione della forza iniziale e risolvendo la disequazione rispetto alla forza stessa si ottiene:

$$F > F_{min} = \frac{m}{\Delta t}\sqrt{5gR + 2\mu_d gL} = 142\ N$$