Corso Meccanica – Anno Accademico 2017/18 – Scritto del 25/06/2018

Recupero primo esonero: es.1 e 2 in due ore; Recupero secondo esonero: es. 3 e 4 in due ore; Esame scritto completo: es. 2, 3, 4 in tre ore

Esercizio n. 1

All'interno del pianeta terra è praticato un tunnel diametrale di sezione trascurabile. Un corpo puntiforme di massa m può cadere senza attrito all'interno del tunnel. Tale corpo viene abbandonato all'entrata del tunnel a velocità nulla.

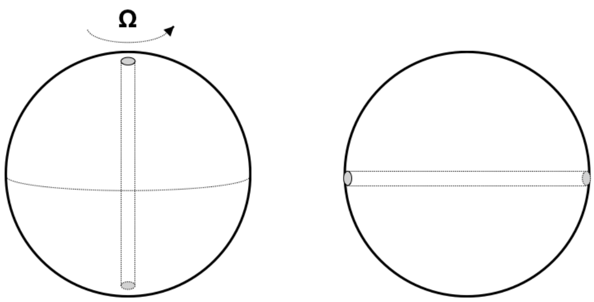
1. Se il tunnel è parallelo all'asse di rotazione della terra, calcolare l'equazione oraria del punto materiale.

Se invece il tunnel è scavato parallelamente al piano equatoriale, calcolare:

2. la nuova equazione oraria;
3. la velocità del corpo quando esso giunge al centro della terra;
4. la reazione vincolare esercitata dalle pareti del tunnel quando il corpo si trova a $R_T/2$ dal centro della terra.

Nota: la forza gravitazionale all'interno della terra è radiale e ha la forma $F(r) = -\frac{GM_T m}{R_T{}^3} r$

[$G\boldsymbol{M_T}/\boldsymbol{R_T}^3$=1.52 10^{-6} s^{-2} ; $\boldsymbol{R_T}$=6.4 10^6 m; $\boldsymbol{m}$ = 80 kg; $\boldsymbol{\Omega}$ = 2π / giorno]



Esercizio n. 2

Un proiettile puntiforme di massa m e velocità iniziale v_0 viene sparato orizzontalmente, lungo una guida, contro l'estremo libero (A) di una molla che, all'altro estremo (B) è connessa ad un vincolo. Fra la guida ed il punto materiale, fino al punto A, è presente attrito caratterizzato dal coefficiente di attrito dinamico μ_d. Tra A e B, invece, non c'e' attrito. La molla ha lunghezza a riposo pari a L_0 e costante elastica k. Sia d la distanza iniziale del punto materiale dall'estremo A.

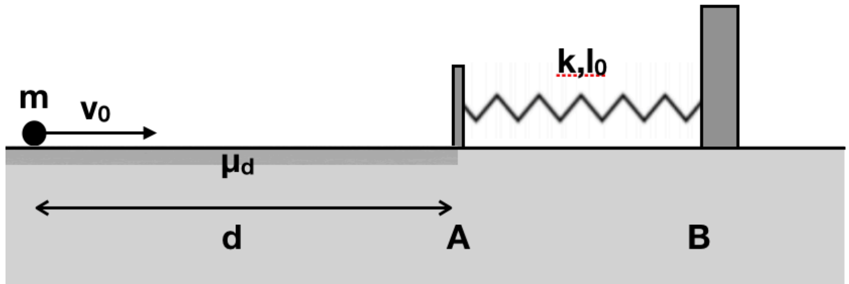
1. Calcolare la velocità con cui il punto materiale giunge in A.

Supponendo che il punto rimanga connesso all'estremo libero della molla dopo averlo toccato, calcolare:

2. la massima compressione della molla;
3. quanto tempo impiega il punto materiale a tornare per la prima volta nella posizione A;
4. il massimo allungamento della molla;
5. la velocità del punto materiale quanto tornerà per la seconda volta nella posizione A.

[$\boldsymbol{m}$ = 2.25kg ; $\boldsymbol{v_0}$ = 12m/s ; $\boldsymbol{k}$ =850 N/m ; $\boldsymbol{d}$ = 250cm ; $\boldsymbol{\mu_d}$ = 0.98]

Nota: Si assuma che la lunghezza a riposo della molla è tale da permettere la prima compressione.



Corso Meccanica – Anno Accademico 2017/18 – Scritto del 25/06/2018

Recupero primo esonero: es.1 e 2 in due ore; Recupero secondo esonero: es. 3 e 4 in due ore; Esame scritto completo: es. 2, 3, 4 in tre ore

Esercizio n. 3

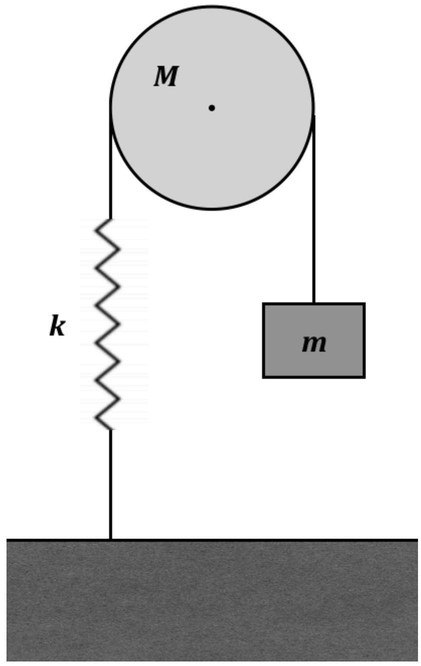
Si consideri il sistema in figura. Una carrucola cilindrica di massa M e raggio R può ruotare senza attrito intorno al suo asse. Un filo inestensibile e di massa trascurabile la collega da un lato ad una molla di costante k e lunghezza a riposo l_0, la cui altra estremità è fissata al suolo, e dall'altro ad una massa m. Il filo non striscia sulla carrucola. Calcolare:

1) l'allungamento della molla all'equilibrio;

Se la molla viene posta nella sua posizione di riposo con m e M fermi, calcolare:

2) la quota minima raggiunta da m rispetto alla posizione iniziale;
3) il periodo delle oscillazioni compiute da m;
4) i valori massimi della reazione vincolare applicata sull'asse di rotazione della carrucola e delle tensioni ai capi della carrucola durante il moto di oscillazione.

[$\boldsymbol{m}$= 1.5 kg ; $\boldsymbol{M}$ = 4 kg; $\boldsymbol{k}$ = 600 N/m]

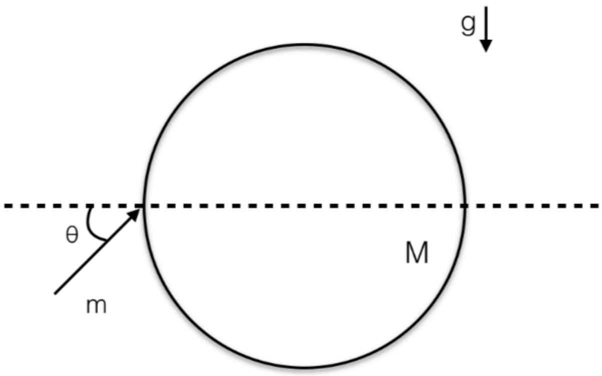


Esercizio n. 4

Un disco omogeneo di massa M e raggio R è vincolato a ruotare intorno a un asse orizzontale fisso,1 passante per il suo centro di massa, grazie ad un perno. Il disco, libero di ruotare senza attrito, è inizialmente fermo. All'istante iniziale un proiettile di massa m e dimensioni trascurabili urta il disco con velocità v ed angolo θ rispetto all'asse orizzontale, alla stessa quota del centro di massa del disco, rimanendovi conficcato ad una distanza R, come in figura.
Si calcoli:

1) la velocità angolare del sistema disco+proiettile immediatamente dopo l'urto;
2) l'impulso trasferito dal perno al sistema;
3) la velocità angolare del sistema quando il proiettile raggiunge la massima quota;
4) il modulo e la direzione della reazione vincolare del perno quando il proiettile raggiunge la massima quota.

[$\boldsymbol{m}$=10 g, $\boldsymbol{M}$=200 g, $\boldsymbol{\theta}$=π/6, $\boldsymbol{R}$=40 cm, $\boldsymbol{v}$=50 m/s]



Corso Meccanica – Anno Accademico 2017/18 – Scritto del 25/06/2018

Recupero primo esonero: es.1 e 2 in due ore; Recupero secondo esonero: es. 3 e 4 in due ore;
Esame scritto completo: es. 2, 3, 4 in tre ore

Soluzione n. 1

(1) Il secondo principio della dinamica applicato alla massa m risulta essere

$$-G\frac{M_T m}{R_T^3}r = m\ddot{r}$$

Si tratta dell'equazione di un oscillatore armonico. Imponendo le condizioni iniziali, cioè che la posizione iniziale vale R_T e la velocità iniziale è nulla, abbiamo la seguente equazione oraria

$$r(t) = R_T\cos(\omega t)$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^3}} = 1.23\ 10^{-3}s; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 5.10\ 10^3 s$$

(2) In questo caso va aggiunta la forza centrifuga, quindi il secondo principio dà

$$-G\frac{M_T m}{R_T^3}r + \mathrm{m}\Omega^2 r = m\ddot{r}$$

Si tratta di nuovo dell'equazione di un oscillatore armonico con pulsazione

$$\omega' = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^3} - \Omega^2} = 1.23\ 10^{-3}s$$

(3) Per trovare la velocità nel punto r=0, cioè nel punto in cui essa raggiunge il valore massimo, possiamo usare l'equazione oraria per la velocità

$$\dot{r}(t) = -\omega' R_T\sin(\omega' t)$$

Il valore massimo corrisponde a

$$\dot{r}(r=0) = -\omega' R_T = -7.87\ 10^3 m/s$$

(4) Dobbiamo prima calcolare la velocità nel punto $R_T/2$. Il tempo per raggiungere $R_T/2$ è

$$\frac{R_T}{2} = R_T\cos(\omega'\bar{t}) \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \frac{1}{\omega}\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3\omega'}$$

In quel punto la velocità vale

$$\dot{r}(\bar{t}) = -\omega' R_T\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\dot{r}(r=0)\frac{\sqrt{3}}{2} = -6.82\ 10^3 m/s$$

La reazione vincolare si deve opporre all'accelerazione di Coriolis. È perpendicolare al tunnel e il suo modulo vale

$$|N| = |F_{co}| = |2m\Omega\dot{r}(\bar{t})| = 79.3\ N$$

Soluzione n. 2

Nello spostarsi sul tratto d il punto materiale è soggetto alla forza d'attrito dinamico $mg\mu_d$ pertanto la sua energia cinetica verrà variata della quantità $L_{att} = -d\mu_d mg$ =-54,1 J.

1) Ciò ci permette di calcolare la velocità del punto materiale in A:

$v_A = \sqrt{v_0^2 - 2\ d\ \mu_d\ g}$ =9,8 m/s

Nel tratto AB della guida non c'è attrito fra il punto materiale e la guida stessa. Il punto materiale prima di tornare in A compie mezza oscillazione di un moto oscillatorio caratterizzato dalla pulsazione $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = 19,4 rad/s

2) La massima compressione della molla si ricava imponendo la conservazione della energia: $\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}k\Delta x_{max}^2 \rightarrow \Delta x_{max} = v_A\sqrt{\frac{m}{k}}$ =50,4 · 10^{-2}m
3) Il punto materiale tornerà in A dopo aver compiuto mezza oscillazione e quindi dopo il tempo $t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 16.2 \cdot 10^{-2}$s

Superato il punto A il proiettile, ancora connesso all'estremo della molla, elongherà la molla e verrà frenato dalla forza elastica dalla forza d'attrito.

4) Quando, dopo aver percorso il tratto $\Delta\ell_-$ la velocità del proiettile si sarà annullata l'energia potenziale della molla sarà data da $\frac{1}{2}k\Delta\ell_-^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 - \mu_d mg\Delta\ell_-$ da ciò possiamo ricavare $\Delta\ell_-^2 + \frac{2\,\mu_d\,m\,g}{k}\Delta\ell_- - \frac{m}{k}v_A^2 = 0$ da cui $\Delta\ell_-$=47,9 · 10^{-2}m
5) Tornando da sinistra verso il punto A sul proiettile di nuovo agisce la forza d'attrito che compirà ancora il lavoro $-\mu_d mg\Delta\ell_-$. Pertanto possiamo calcolare la velocità (v_{fin}) con cui il punto passerà per la terza volta in A con l'espressione $v_{fin} = \sqrt{v_A^2 - 4\,\Delta\ell_-\,\mu_d\,g}$ =8,8 m/s.

Soluzione n. 3

Il sistema è composto da un punto materiale e da corpo rigido vincolato. Scriviamo le equazioni cardinali per il sistema, chiamando I il momento d'inerzia del corpo rigido intorno al suo centro di massa, τ la tensione del filo, α e a rispettivamente l'accelerazione angolare del corpo rigido e l'accelerazione lineare del punto materiale:

$$I\alpha = R\tau - Rk(x - x_0) = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$
$$ma = mg - \tau$$

Abbiamo scelto come positivo il verso orario per il moto rotatorio del cilindro e verso il basso per il moto del punto materiale. Dalle ipotesi del problema di ottiene la relazione:

$$a = \ddot{x} = \alpha R$$
$$I\alpha = R\tau - Rk(x - x_0) = \frac{1}{2}MR^2\frac{\ddot{x}}{R} = \frac{1}{2}MR\ddot{x}$$
$$\frac{1}{2}MR\ddot{x} = Rm(g - \ddot{x}) - Rk(x - x_0) \rightarrow \ddot{x}(M + 2m) + 2k(x - x_0) = 2mg$$

Risolvendo il sistema di due equazioni rispetto ad a e a τ otteniamo:

$$\ddot{\xi} + \frac{2k}{M + 2m}\xi = \frac{2mg}{M + 2m}$$

Dove abbiamo posto:

$$\xi = x - x_0$$

La soluzione è un moto oscillatorio di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M + 2m}{2k}}$$

Per il quale, applicando le condizioni iniziali si ottiene la legge oraria:

$$\xi(t) = -\frac{mg}{k}\cos\Omega t + \frac{mg}{k}$$

Corso Meccanica – Anno Accademico 2017/18 – Scritto del 25/06/2018

Recupero primo esonero: es.1 e 2 in due ore; Recupero secondo esonero: es. 3 e 4 in due ore; Esame scritto completo: es. 2, 3, 4 in tre ore

1) La condizione di equilibrio si ottiene imponendo $a = \alpha = 0$ nelle equazioni cardinali. Da cui:

$$R\tau - Rk\xi = 0$$
$$mg - \tau = 0$$

per cui si ottiene l'elongazione corrispondente alla posizione di equilibrio:

$$\xi_{eq} = \frac{mg}{k} = 2.45\ cm$$

2) A partire dalla legge oraria del moto ricaviamo che l'elongazione massima del sistema si ha al tempo

$$t = \frac{\pi}{\Omega}$$

in corrispondenza del quale si ha:

$$\xi_{max} = \frac{2mg}{k} = 4.9\ cm$$

Allo stesso risultato si perviene anche applicando la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale e l'istante di massima elongazione. In entrambi i casi il sistema non ha energia cinetica pertanto occorre uguagliare le energie potenziali nei due momenti. Si ha:

$$0 = \frac{1}{2}k\xi_{max}^2 - mg\xi_{max}$$

Da cui, escludendo la soluzione corrispondente a elongazione nulla si ottiene lo stesso risultato visto sopra:

$$\xi_{max} = \frac{2mg}{k} = 4.9\ cm$$

3) Il periodo delle piccole oscillazioni è stato già ricavato dalla legge oraria del moto:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+2m}{2k}} = 0.48\ s$$

4) Ricaviamo la tensione τ del filo dalle equazioni cardinali, ottenendo:

$$\tau = mg - m\ddot{\xi} = mg - m\frac{2mg}{M+2m} + m\frac{2k}{M+2m}\xi = \frac{m(M+2m) - 2m^2}{M+2m}g + m\frac{2k}{M+2m}\xi$$

$$\tau = \frac{mMg + 2mk\xi}{M+2m}$$

Pertanto la tensione è massima quando l'elongazione è massima cioè per $\xi = \xi_{max}$

$$\tau_{max} = \frac{Mm + 4m^2}{M+2m}g = 21.0\ N$$

Nella stessa configurazione la tensione del filo dalla parte della molla è pari a:

$$\tau'_{max} = k\xi_{max} = 2mg = 29.4\ \mathrm{N}$$

La reazione vincolare R esercitata dal perno su cui è montato il cilindro, è uguale e contraria alla somma delle forze che agiscono sul cilindro stesso, vale a dire la tensione del filo, la forza elastica della molla e la forza peso di M.

$$R = Mg + \tau + k\xi = \frac{Mg + Mmg + 2mk\xi}{M+2m} + k\xi = \frac{Mg + Mmg + 2mk\xi + Mk\xi + 2mk\xi}{M+2m}$$

Da cui sommando si ottiene:

$$R = \frac{1}{M+2m}[M(1+m)g + (M+4m)k\xi]$$

Pertanto la reazione vincolare è minima e pari alla tensione del filo quando la molla è in condizioni di riposo, ξ=0 ed è massima quando la molla è alla sua massima elongazione, cioè per $\xi=\xi_{max}$. In tale condizione:

$$R_{max} = \frac{1}{M+2m}\left[M(1+m)g + (M+4m)k\frac{2mg}{k}\right] = \frac{M^2+5mM+8m^2}{M+2m}g = 89.6\ N$$

Soluzione n. 4

1) Conservazione del momento angolare rispetto al vincolo

$$L_i = mvRsin\theta = L_f = (I+mR^2)\omega_1$$

da cui

$$\omega_1 = \frac{mvRsin\theta}{(I+mR^2)} = 5.7\, rad/s.$$

2) Il modulo dell'impulso J del vincolo è pari alla variazione della quantità di moto totale del sistema. Lungo le direzioni tangente e perpendicolare alla superficie di impatto si ha:

$$J_p = \delta p_p = -mvcos\theta = -0.43Kg\, m/s$$
$$J_t = \omega_1 mR - mvsin\theta = -0.23Kg\, m/s$$

quindi :

$$J = \sqrt{J_p^2 + J_t^2} = 0.49\ g\, m/s$$

3) Dopo l'urto si conserva l'energia, quindi

$$E_i = \frac{1}{2}(I+mR^2)\omega_1^2 = E_f = \frac{1}{2}(I+mR^2)\omega_2^2 + mgR$$

ottenendo

$$\omega_2 = \left(\omega_1^2 - \frac{2mgR}{(I+mR^2)}\right)^{1/2} = 5.3\, rad/s$$

4) La reazione vincolare deve compensare la forza peso e curvare il moto del proiettile, dunque

$$R = (M+m)g - m\omega_2^2 R = 2.0N$$

dunque rivolta verso l'alto.