# Fenomeni Oscillatori: Equazioni di Base della Meccanica del Punto Materiale

Lezione del Corso di *Esercitazioni di Laboratorio di Meccanica*,
Roma, 5 Maggio, 2014

Roberto Bonciani[1],

*Diparto di Fisica dell'Università di Roma "La Sapienza" e INFN Sezione di Roma, Piazzale Aldo Moro 5, 00185 Roma*

**Abstract**

Lo scopo di questa lezione e' di introdurre e risolvere le equazioni del moto concernenti la meccanica di un punto materiale soggetto ad una forza di richiamo elastica.

[1]Email: roberto.bonciani@roma1.infn.it

# Contents

# 1 Moto Armonico

# 2 Moto Armonico con Forza Costante

# 3 Moto Armonico con Forza Costante che si Oppone al Moto (Attrito Radente)

## 3.1 Attrito Radente e Attrito Volvente

# 4 Moto Armonico con Forza Dipendente dalla Velocità che si Oppne al Moto (Attrito Viscoso)

# 5 Moto Armonico con Forzante Sinusoidale

# 6 Moto Armonico con Attrito Viscoso e Forzante Sinusoidale: Risonanza

Discutiamo adesso in dettaglio la soluzione della seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = A\cos(\Omega t + p)\,, \qquad \lambda, \omega, \Omega \in \mathfrak{R}_+ \tag{1}$$

La soluzione dell'Eq. (1) sarà data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata, $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$, e di una soluzione particolare. La soluzione dell'omogenea è:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + A_2 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right)\,, \tag{2}$$

dove le due costanti $A_1$ e $A_2$ devono essere fissate imponendo le condizioni iniziali.

Per trovare la soluzione particolare, che la (1) è la parte reale della seguente equazione differenziale nei complessi:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = Ae^{i(\Omega t + p)}\,. \tag{3}$$

Cerchiamo una soluzione della (3) nella forma

$$x_p(t) = be^{i\Omega t}\,, \tag{4}$$

dove adesso $b \in \mathfrak{C}$. Si ha

$$\dot{x} = ibe^{i\Omega t} \qquad \ddot{x} = -b\Omega^2 e^{i\Omega t}\,. \tag{5}$$

Sostituendo le (5) nella (3) e imponendo che (4) sia soluzione, otteniamo la seguente equazione per $b$:

$$-b\Omega^2 + i2\lambda\Omega b + \omega^2 b = Ae^{ip}\,, \tag{6}$$

dove abbiamo semplificato a destra e a sinistra dell'uguale il termine $e^{i\Omega t}$. Si trova quindi:

$$b = \frac{Ae^{ip}}{\omega^2 - \Omega^2 + i2\lambda\Omega}\,. \tag{7}$$

Figure 1: Curve di risonanza.

Riscriviamo adesso $b$ come

$$b = Be^{iC} \tag{8}$$

con $B, C \in \mathfrak{R}$. Avremo

$$\begin{aligned} B &= \|b\| = \frac{A\|e^{ip}\|}{\|\omega^2 - \Omega^2 + i2\lambda\Omega\|} = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\,, && (9) \\ C &= p + \arctan\left(\frac{2\lambda\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right), && (10) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che se $a, b \in \mathfrak{C}$ allora $\|ab\| = \|a\|\,\|b\|$ e $\|a/b\| = \|a\|/\|b\|$.

Quindi, la soluzione dell'Eq. (1) è:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + A_2 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right) + \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + C) \tag{11}$$

e se prendiamo il caso $\lambda < \omega$ abbiamo:

$$x(t) = Be^{-\lambda t}\cos(\omega' t - \phi) + \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + C)\,, \tag{12}$$

dove

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,. \tag{13}$$

Se aspettiamo un tempo sufficientemente lungo, $t \gg 1$, il termine esponenziale diventa piccolo e abbiamo "accesso" alla parte risonante:

$$x(t) \overset{t \gg 1}{=} \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + C)\,. \tag{14}$$

L'ampiezza della curva (14),

$$f(\Omega) = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\,, \tag{15}$$

ha la forma mostrata in Fig. 1. Per $\lambda \to 0$ il massimo tende all'infinito e la frequenza di risonanza tende a $\omega$. Se $\lambda \neq 0$, la curva ha un massimo per

$$\Omega_R = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\omega'^2 - \lambda}\,, \tag{16}$$

come si puo' vedere annullando la derivata prima:

$$\frac{df}{d\Omega} = 2A\frac{(\omega^2 - \Omega^2 - 2\lambda^2)\Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} = 0\,, \tag{17}$$

che per $\Omega \neq 0$ implica

$$\omega^2 - \Omega^2 - 2\lambda^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Omega^2 = \omega^2 - 2\lambda^2 \tag{18}$$

e infine la (16).

Studiamo la concavità della $f(\Omega)$ al picco. Si ha:

$$\left.\frac{d^2 f}{d\Omega^2}\right|_{\Omega=\Omega_R} = -\frac{4\lambda^2\Omega_R^2}{(4\lambda^2(\lambda^2+\Omega_R^2))^{\frac{3}{2}}}(2\lambda^2+3\Omega_R^2) < 0\,. \tag{19}$$

La frequenza $\Omega_R$ è detta frequenza di risonanza. In corrispondenza della risonanza l'ampiezza dell'oscillazione è data da:

$$f(\Omega_R) = \frac{A}{2\lambda\sqrt{\omega^2-\lambda^2}} = \frac{A}{2\lambda\omega'}\,. \tag{20}$$

Un'altro importante parametro della curva (15) è la larghezza a mezza altezza. Per trovarla cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f(\Omega) = \dfrac{A}{2\lambda\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}\,, \\ f(\Omega) = \dfrac{A}{\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}\,. \end{cases} \tag{21}$$

Si ha:

$$(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2 - 16\lambda^2(\omega^2-\lambda^2) = 0\,, \tag{22}$$

che puo' essere scritta nella forma

$$\xi^2 + 4\lambda^2\xi - 4\lambda^2(3\omega^2-4\lambda^2) = 0\,, \tag{23}$$

dove abbiamo utilizzato $\xi = \Omega^2 - \omega^2$. Risolvendo l'Eq. (23) si ottiene

$$\xi_\pm = -2\lambda^2 \pm 2\lambda\sqrt{3(\omega^2-\lambda^2)} \tag{24}$$

e quindi

$$\Omega_\pm^2 = \omega^2 - 2\lambda^2 \pm 2\sqrt{3}\lambda\sqrt{\omega^2-\lambda^2} = \Omega_R^2 \pm 2\sqrt{3}\lambda\omega'\,. \tag{25}$$

Per trovare $\Omega$ dobbiamo estrarre la radice, trovando quindi 4 soluzioni possibili. Imponendo però che $\Omega$ sia positivo, le due soluzioni negative vanno scartate e infine si ottiene:

$$\Omega_\pm = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2 \pm 2\sqrt{3}\lambda\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}\,. \tag{26}$$

Per cui:

$$\begin{aligned} (\Delta\Omega)^2 &= (\Omega_+ - \Omega_-)^2 \\ &= 2(\omega^2-2\lambda^2) - 2\sqrt{(\omega^2-2\lambda^2)^2 - 12\lambda^2(\omega^2-\lambda^2)} \\ &= 2(\omega^2-2\lambda^2) - 2\sqrt{(\omega^2-4\lambda^2)^2 - 8\lambda^2\omega^2} \\ &= 2\left[\Omega_R^2 - \sqrt{(\Omega_R^2-2\lambda^2)^2 - 8\lambda^2(\Omega_R^2+2\lambda^2)}\right]\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Se $\lambda^2 \ll \Omega_R^2$ possiamo espandere l'espressione in Eq. (27) ottenendo

$$(\Delta\Omega)^2 \simeq 12\lambda^2\,, \tag{28}$$

e quindi

$$\Delta\Omega \simeq 2\sqrt{3}\lambda\,. \tag{29}$$

Figure 2: Sistema di laboratorio.

## 6.1 In Laboratorio

Nell'esperienza di laboratorio, il sistema è costituito da un carrello di massa $m$ collegato ad un estremo fisso tramite una molla di costante elastica $k$ e all'altro estremo, che può oscillare (la forzante) con pulsazione $\Omega$, tramite un'altra molla di costante elastica $k$. Inoltre il sistema e' immerso in un mezzo che agisce su di esso tramite una forza di tipo viscoso, con costante caratteristica $\beta < \omega$. Il sistema è schematizzato in Fig. 2.

### 6.1.1 Forzante spenta

Poniamo $l = 0$. L'equazione del moto diventa:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx_1 + kx_2 - \beta\dot{x} \\ &= -kx + k(L-x) - \beta\dot{x} \\ &= -2kx + kL - \beta\dot{x}\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Facendo la seguente sostituzione

$$\xi = x - \frac{L}{2}\,, \tag{31}$$

si ottiene

$$\ddot{\xi} + \frac{\beta}{m}\dot{\xi} + \frac{2k}{m}\xi = 0\,, \tag{32}$$

cioè l'equazione di un oscillatore smorzato in cui:

$$\lambda = \frac{\beta}{2m}\,, \qquad \omega^2 = \frac{2k}{m}\,. \tag{33}$$

La soluzione generale (ricordiamo che abbiamo assunto $\beta < \omega$) è

$$x(t) = \frac{L}{2} + Ce^{-\frac{\beta}{2m}} \cos(\omega' t - \phi)\,, \tag{34}$$

dove

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{2k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} \tag{35}$$

è la pulsazione propria del sistema.

### 6.1.2 Forzante accesa

Accendiamo adesso la forzante, che quindi agirà sul sistema facendo variare la lunghezza $l$ tramite la legge $l(t) = l_0 \cos(\Omega t)$. l'equazione del moto diventa:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx_1 + kx_2 - \beta\dot{x} \\ &= -k(x - l(t)) + k(L-x) - \beta\dot{x} \\ &= -2kx + kL - \beta\dot{x} + kl(t)\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Facendo la solita sostituzione

$$\xi = x - \frac{L}{2}\,, \tag{37}$$

si ottiene:

$$\ddot{\xi} + \frac{\beta}{m}\dot{\xi} + \frac{2k}{m}\xi = \frac{kl_0}{m}\cos(\Omega t)\,, \tag{38}$$

che è l'equazione di un moto armonico con attrito viscoso e forzante sinusoidale trattato nel paragrafo precedente. Posto

$$\lambda = \frac{\beta}{2m}\,, \qquad \omega^2 = \frac{2k}{m}\,, \qquad A = \frac{kl_0}{m}\,, \tag{39}$$

si trova la seguente soluzione dell'equazione del moto:

$$x(t) = \frac{L}{2} + Ce^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega' t - \phi) + \frac{\frac{kl_0}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2k}{m} - \Omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2}\Omega^2}}\cos(\Omega t + p)\,. \tag{40}$$

Se aspettiamo un tempo sufficientemente lungo ($t \gg 1$ o meglio $t \gg T = \frac{2\pi}{\omega}$, il termine che contiene l'esponenziale diventa irrilevante e il moto viene descritto dal termine risonante:

$$x(t) = \frac{L}{2} + \frac{\frac{kl_0}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2k}{m} - \Omega^2\right)^2 + \frac{\beta^2}{m^2}\Omega^2}}\cos(\Omega t + p)\,. \tag{41}$$

### 6.1.3 Osservazioni

1. Dal moto con forzante spenta si può, in linea di principio, estrarre $\beta$ facendo un fit logaritmico sui massimi dell'oscillazione che vanno come $e^{-\frac{\beta}{2m}t}$. Abbiamo assunto che l'attrito sia soltanto di tipo viscoso. In realtà si vede dalla successione dei massimi che in buona approssimazione questi stanno su una retta, ovvero l'attrito radente è probabilmente piu' importante dell'attrito viscoso. ????

2. Dal moto con forzante spenta si misura la pulsazione caratteristica del sistema:

$$\omega' = \sqrt{\frac{2k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} \tag{42}$$

3. Dal moto con forzante accesa si misura la frequenza di risonanza

$$\Omega_R = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\omega'^2 - \lambda^2} \overset{\lambda^2/\omega'^2 \ll 1}{\simeq} \omega' \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\omega'^2}\right)\,. \tag{43}$$

4. Se prendiamo l'inverso del quadrato dell'ampiezza si trova una parabola in $\Omega^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f^2(\Omega)} &= \frac{m^2}{k^2 l_0^2}\left\{\Omega^4 + \left(\frac{\beta^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}\right)\Omega^2 + \frac{4k^2}{m^2}\right\}\,, && (44) \\ &= a\,X^2 + b\,X + c\,, && (45) \end{aligned}$$

dove

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{m^2}{k^2 l_0^2}\,, && (46)\\
b &= \frac{m^2}{k^2 l_0^2}\left(\frac{\beta^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}\right)\,, && (47)\\
c &= \frac{m^2}{k^2 l_0^2}\frac{4k^2}{m^2}\,, && (48)\\
X &= \Omega^2\,. && (49)
\end{aligned}
$$

Facendo un fit lineare sui tre parametri $a$, $b$, $c$, misurando $m$, si possono ricavare i tre parametri incogniti $k$, $l_0$ e $\beta$.