

Dipartimento di Fisica, Sapienza Università di Roma

**Complementi di Fisica per
Laboratorio di Meccanica.**

Cesare Bini

Con il corso di Laboratorio di Meccanica gli studenti di Fisica sperimentano il primo approccio con la pratica della misura in laboratorio. Vengono proposte esercitazioni riguardanti temi di meccanica del punto, di meccanica dei sistemi e di dinamica dei fluidi. Le conoscenze che gli studenti stanno apprendendo nel parallelo corso di Meccanica, sono necessarie per la comprensione della fisica dei sistemi proposti. In questi appunti sono discussi in modo approfondito alcuni di questi sistemi per una loro corretta comprensione. Per il caso dell'esercitazione di meccanica dei fluidi, vengono trattati degli elementi di Fisica Generale a complemento di quanto svolto nel corso di Meccanica.

(1) STUDIO DEL MOTO DI UN CARRELLO IN UN PIANO INCLINATO - I.....	4
1.1. MOTO DI UN PUNTO MATERIALE SU UN PIANO INCLINATO.....	4
1.2. ROTOLAMENTO E ATTRITO VOLVENTE.....	6
1.3. ANALISI DEL MOTO DEL CARRELLO TENENDO CONTO DELL'ATTRITO VOLVENTE DELLE RUOTE.	8
1.4. ANALISI DELLE ENERGIE DISSIPATE.....	10
(2) STUDIO DEL MOTO DI UN CARRELLO IN UN PIANO INCLINATO - II	12
2.1 CARRELLO APPESO ALL'ESTREMITÀ DEL PIANO INCLINATO CON UNA MOLLA.....	12
2.2 CASO DELL'ATTRITO RADENTE/VOLVENTE.	13
2.3 CASO DELL'ATTRITO VISCOSO.....	15
2.4 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE.....	17
(3) OSCILLAZIONI DI UN CORPO RIGIDO: IL PENDOLO FISICO.	19
3.1 CONSIDERAZIONI GENERALI.....	19
3.2 MISURA DI G CON UN GENERICO PENDOLO FISICO.....	20
3.3 MISURA DI G CON IL PENDOLO REVERSIBILE.	23
3.4 L'APPROSSIMAZIONE DI PICCOLO ANGOLO.....	25
(4) STUDIO DEL MOTO DI UN VOLANO.	28
4.1 MOTO DEL VOLANO IN ASSENZA DELLE PALETTE.....	28
4.2 MOTO DEL VOLANO IN PRESENZA DELLE PALETTE.	30
4.3 STUDIO SPERIMENTALE DEL MOTO DI UN VOLANO.....	32
(5) LEGGE DI SVUOTAMENTO DI UN CONDOTTO ATTRAVERSO CAPILLARI.....	33
5.1 GENERALITÀ SUI LIQUIDI: I LIQUIDI IDEALI.....	33
5.2 MOTO DI UN LIQUIDO IDEALE IN UN CONDOTTO.....	35
5.3 IL FENOMENO DELLA VISCOSITÀ.	38
5.4 LIQUIDO REALE IN UN CONDOTTO CILINDRICO: LA LEGGE DI HAGEN-POISEUILLE.	40
5.5 MOTO LAMINARE E MOTO TURBOLENTO: IL NUMERO DI REYNOLDS.....	42
5.6 LEGGE DI SVUOTAMENTO DI UN CAPILLARE NEL REGIME LAMINARE E NEL REGIME TURBOLENTO.	43
5.7 CONSIDERAZIONI SPERIMENTALI.....	46

(1) Studio del moto di un carrello in un piano inclinato - I

1.1. Moto di un punto materiale su un piano inclinato.

Consideriamo un carrello vincolato a muoversi su un piano inclinato. Il carrello è costituito da una massa M con 4 ruote, ciascuna di massa $m \ll M$. Chiamiamo θ l'inclinazione del piano rispetto all'orizzontale. Il sistema è schematizzato in Fig.1.1.

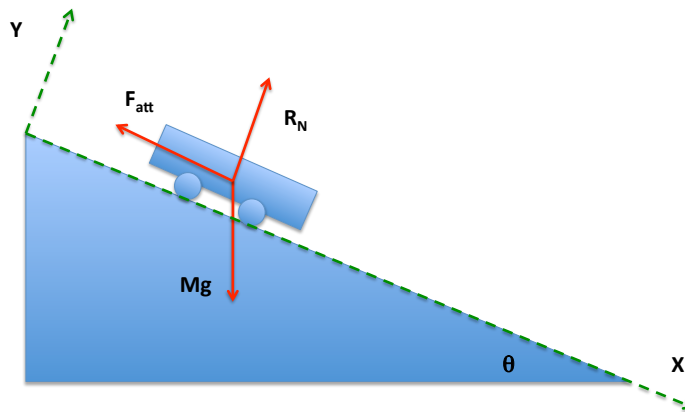


Fig.1.1 Schema delle forze che agiscono sul carrello. Sono anche indicati gli assi X e Y .

Trattiamo dapprima il sistema assumendo che il carrello sia assimilabile ad un punto materiale di massa M che si muove strisciando sul piano inclinato. Chiamiamo μ_d il coefficiente di attrito dinamico tra piano e carrello. In questa approssimazione non si tiene conto del fatto che il carrello in realtà non sta strisciando, ma piuttosto rotola attraverso le 4 ruote cilindriche. Nel seguito vedremo come la trattazione del problema si modifica se si abbandona questa ipotesi.

Il punto materiale sperimenta l'azione delle 3 forze indicate in figura: la forza peso Mg diretta verso il basso, la reazione vincolare R_N ortogonale al piano, e infine la forza di attrito, sempre parallela al piano. Quest'ultima avrà un verso sempre opposto al moto, quindi verso l'alto durante la fase di discesa e verso il basso nell'eventuale fase di risalita. Disponiamo l'asse X lungo il piano diretto verso il basso e con l'origine posta nella posizione di partenza del carrello; l'asse Y è a questo ortogonale, ambedue gli assi sono disposti come in figura. Proiettando l'equazione del moto sui due assi e detta a , l'accelerazione del carrello lungo l'asse X , abbiamo per gli assi X e Y rispettivamente:

$$Mg \sin \theta - \mu_d R_N = Ma$$

$$R_N = Mg \cos \theta$$

(1.1)

La seconda equazione esprime la condizione di equilibrio lungo l'asse Y , cioè il fatto che la reazione vincolare uguaglia la componente Y della risultante delle altre forze. Dalle due equazioni, sostituendo, ricaviamo l'accelerazione

$$a = g \sin \theta - \mu_d g \cos \theta \quad (1.2)$$

che risulta, come previsto, indipendente dalla massa e dipendente dall'angolo di inclinazione del piano. Nel caso in cui l'angolo θ sia piccolo per cui possiamo assumere (troncando al primo ordine gli sviluppi in serie):

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1$$

si ottiene l'espressione:

$$a = g\theta - \mu_d g \quad (1.3)$$

Si tratta di una espressione molto interessante dal punto di vista sperimentale. Infatti se siamo in grado di misurare l'accelerazione con cui il carrello scende lungo il piano inclinato in funzione dell'angolo di inclinazione del piano, possiamo ricavare l'accelerazione di gravità g semplicemente come pendenza della retta sperimentale. Inoltre dall'intercetta all'origine possiamo ricavare il coefficiente di attrito, il quale in effetti determina di quanto la retta sperimentale passi sotto l'origine degli assi. L'andamento atteso è riportato in **Fig.1.2**.

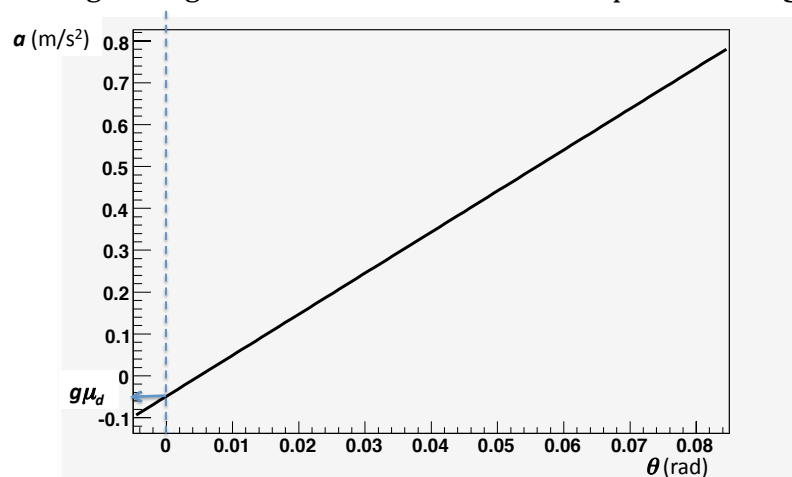


Fig.1.2 Andamento dell'accelerazione del moto di discesa del carrello con l'angolo di inclinazione del piano inclinato. Si noti che l'intercetta all'origine è negativa. Dalla misura del suo valore assoluto è possibile ricavare il coefficiente di attrito dinamico μ_d .

Si noti che la linearità della relazione è garantita solo nel limite di piccoli angoli. Fino a quale angolo questo limite sia valido, dipende da quale sia il livello di precisione richiesto nella misura. Per $\theta=10^\circ$, l'errore che si commette nell'approssimare il seno con l'angolo è pari allo 0.5%. Per $\theta=20^\circ$ lo stesso errore diventa del 2%. Quindi la distorsione sulla misura di g sarà al più del 5 per mille per angoli inferiori ai 10 gradi. La scelta dell'angolo massimo dipende quindi dal tipo di precisione che si intende avere sulla misura di g .

Consideriamo ora un eventuale moto di risalita, che si può ottenere per esempio facendo partire il carrello dal basso con velocità non nulla verso l'alto. In tal caso, tutto il ragionamento fatto resta uguale salvo il fatto che la forza di attrito cambia segno divenendo ora concorde con la forza peso. Ciò si traduce nel fatto che il modulo dell'accelerazione è ora esprimibile come:

$$a = g\theta + \mu_d g \quad (1.4)$$

per cui, facendo la differenza Δa tra i valori del modulo dell'accelerazione ottenuto in discesa e in risalita, si ottiene:

$$\Delta a = 2\mu_d g \quad (1.5)$$

da cui deriviamo un possibile metodo di misura del coefficiente di attrito dinamico:

$$\mu_d = \frac{\Delta a}{2g} \quad (1.6)$$

Quest'ultimo metodo presenta, da un punto di vista sperimentale, un vantaggio significativo rispetto al metodo precedente. Infatti nella differenza di accelerazione, eventuali incertezze sistematiche comuni nella misura delle due accelerazioni si cancellano. Viceversa nel metodo derivato dalle formule (1.2) e (1.3), conta la misura assoluta dell'accelerazione.

1.2. Rotolamento e attrito volvente.

Nel precedente paragrafo il moto del carrello è stato trattato nell'ipotesi che il carrello fosse assimilabile ad un punto materiale che striscia sul piano inclinato. In realtà sappiamo che il contatto tra carrello e piano è dato dalle 4 ruote cilindriche poste sotto il carrello, ciascuna delle quali si muove sul piano rotolando senza strisciare. La questione da dover affrontare ora è come dover trattare l'attrito in questo caso.

La condizione di puro rotolamento di un cilindro che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato, corrisponde al fatto che in ogni istante, il contatto tra cilindro e piano è dato da un unico asse, un solo punto se visto in proiezione, che costituisce il "centro istantaneo di rotazione". Tale punto è tenuto fermo dall'attrito statico fornito dal piano. Tuttavia tale attrito, essendo per l'appunto statico, non compie alcun lavoro, agendo infatti esclusivamente su un punto fermo. Dunque in questo modello non si avrebbe alcun attrito e alcuna dissipazione di energia.

Tuttavia anche nel caso di rotolamento vi è in generale una forma di attrito che da luogo ad una dissipazione di energia, responsabile del fatto, per esempio, che per condurre un'automobile a velocità costante su un piano orizzontale occorre comunque consumare carburante. Vediamo ora che, in effetti, agisce un secondo tipo di attrito che viene chiamato "attrito volvente" per distinguerlo da quello descritto nel precedente paragrafo detto "attrito radente".

Vediamo qualitativamente cosa succede.

Consideriamo un cilindro di raggio r che rotola sul piano inclinato. Chiamiamo \mathbf{O} il punto di contatto tra ruota e piano, il "centro istantaneo di rotazione". Se effettuiamo un ingrandimento della zona intorno a \mathbf{O} come nella **Fig.1.3**, ci rendiamo subito conto che in realtà tale punto di contatto non è ben definito. Nei casi reali si dovrebbe piuttosto parlare di una "zona di contatto" della quale \mathbf{O} rappresenta il punto centrale. In effetti accade che durante il rotolamento, sia il cilindro che il piano possono deformarsi secondo le modalità illustrate appunto nella **Fig.1.3**. Assumiamo che si tratti di una deformazione perfettamente elastica, cioè tale che quando la ruota è passata, il piano assume la stessa forma che aveva prima del passaggio della ruota e che anche la ruota, tolta dal contatto con il piano, torna ad assumere la sua forma cilindrica. A prima vista si può pensare che l'ipotesi di deformazione elastica implichi mancanza di attrito. In realtà anche nel caso di deformazione elastica può aver luogo una dissipazione di energia sotto forma di calore che si traduce quindi in attrito. Assumendo per semplicità che, come in figura, sia solo il piano a deformarsi, vediamo infatti che

in ogni istante, i punti della superficie del piano a valle di O sperimentano una compressione da parte della ruota, quelli a monte un rilassamento che li riporta nella loro posizione di equilibrio. Durante la compressione il piano acquista un'energia potenziale elastica che poi restituisce nella fase di rilassamento sotto forma di lavoro motore sulla ruota e sotto forma di calore dissipato. E' proprio qui il punto: se una parte dell'energia potenziale acquistata viene restituita sotto forma di calore, allora si ha attrito volvente. Nel caso contrario il moto è invece privo di attrito.

Concentriamoci sul primo caso. Se una parte dell'energia potenziale acquistata è dissipata, significa che il lavoro che il piano restituisce alla ruota spingendola è inferiore a quello che la ruota aveva fornito al piano nella fase di compressione. Dette N_C e N_R le reazioni vincolari rispettivamente nella fase di compressione e di rilassamento e detti L_C e L_R i lavori corrispondenti alle due fasi, si ha:

$$L_R = N_R \times s > L_C = N_C \times s$$

in cui s è lo spostamento, comune nelle due fasi in virtù della supposta elasticità della deformazione, da cui

$$N_R > N_C$$

Ciò significa che vi è uno squilibrio tra le due reazioni vincolari, come mostrato in **Fig.1.4**. Tutto va come se la reazione vincolare risultante R_N non fosse applicata esattamente in O , ma in un punto del piano più a valle di O , diciamo O' , ad una distanza vettoriale b da O .

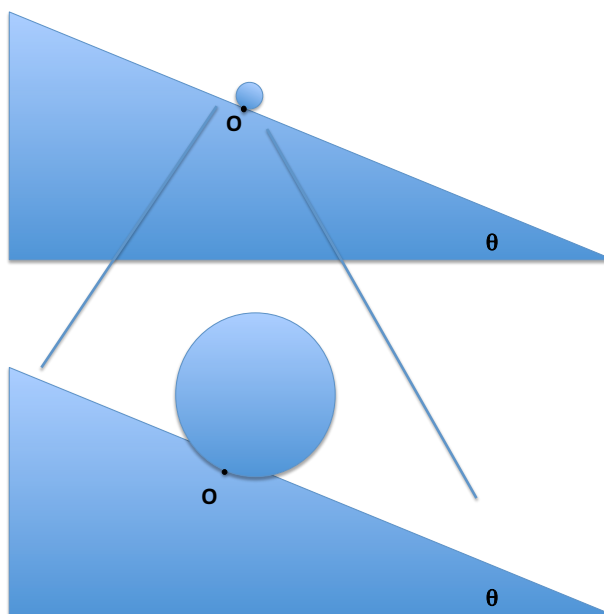


Fig.1.3 Contatto tra ruota e piano inclinato. Lo "zoom" mostra che il contatto tra ruota e piano inclinato non è puntiforme. Il punto O è in realtà un'"astrazione", più correttamente dovremmo parlare di zona estesa di contatto.

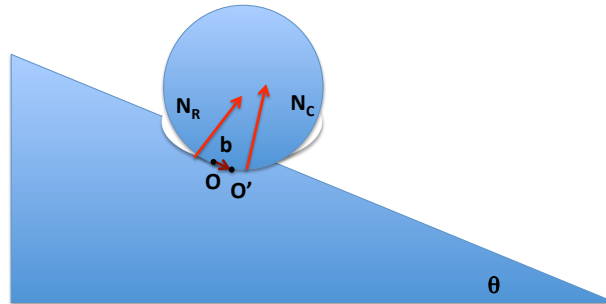


Fig.1.4 Schema più realistico del contatto tra ruota e piano inclinato, nel caso in cui la ruota stia scendendo lungo il piano inclinato e vi sia una dissipazione di energia. Sono indicati i vettori delle reazioni vincolari legati alla fase di compressione (\mathbf{N}_C) e a quella di rilassamento (\mathbf{N}_R). Il vettore \mathbf{b} congiunge il polo \mathbf{O} con il centro delle reazioni vincolari \mathbf{O}' .

Sulla base delle considerazioni appena svolte, la risultante dei momenti delle forze rispetto al polo \mathbf{O} diviene:

$$\vec{M} = \vec{r} \times M\vec{g} + \vec{b} \times R_N \quad (1.7)$$

Il primo termine è il momento della forza peso responsabile della discesa del cilindro. Il secondo termine, che è presente solo nel caso in cui abbia luogo lo squilibrio delle reazioni vincolari descritto sopra, è parametrizzato dal vettore \mathbf{b} , che rappresenta appunto lo spostamento del centro delle reazioni vincolari rispetto al centro istantaneo di rotazione. Più grande il modulo di \mathbf{b} , maggiore è lo squilibrio tra compressione e rilassamento, maggiore l'energia dissipata per attrito.

1.3. Analisi del moto del carrello tenendo conto dell'attrito volvente delle ruote.

Consideriamo ora il sistema costituito dalla massa \mathbf{M} e dalle 4 ruote, ciascuna di massa $m \ll M$. Chiamiamo \mathbf{r} il raggio delle ruote, e \mathbf{T} la forza di trazione tra la massa \mathbf{M} e ciascuna delle 4 ruote. Quest'ultima forza di trazione è una forza interna del sistema, e si esercita tra carrello e ruote in corrispondenza degli assi di trasmissione. Anche in questi assi possono aver luogo delle forme di attrito dovuti allo scorrimento tra parti meccaniche, forze che tuttavia ignoriamo in questa trattazione. Scriviamo dunque le equazioni del moto del centro di massa del carrello e la seconda equazione cardinale della meccanica per il moto di ciascuna ruota rispetto al centro istantaneo di rotazione. Proiettiamo direttamente la prima equazione sull'asse \mathbf{X} e la seconda sull'asse di rotazione.

L'equazione del carrello è:

$$Ma = Mg \sin \theta - 4T \quad (1.8)$$

quella della ruota:

$$I\alpha = rT + mg \sin \theta r - bmg \cos \theta \quad (1.9)$$

in cui α è l'accelerazione angolare della ruota, e in cui di nuovo abbiamo espresso la reazione vincolare ponendo a zero la risultante delle forze nella direzione normale al piano. Utilizzando la relazione

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad (1.10)$$

che esprime la condizione di “puro rotolamento”, possiamo risolvere le due equazioni (8) e (9) con il vincolo (10), rispetto alle incognite \mathbf{a} e \mathbf{T} . Ricaviamo prima \mathbf{T} dalla dalle (9) e quindi la sostituiamo nella (8):

$$T = \frac{1}{r} \left[I \frac{a}{r} - mg(rs\theta - b\cos\theta) \right]$$

$$Ma = Mgs\theta - 4I \frac{a}{r^2} + 4mgs\theta - 4 \frac{b}{r} mg\cos\theta \quad (1.11)$$

che risolviamo rispetto all'accelerazione:

$$a \left[M + 4 \frac{I}{r^2} \right] = (M + 4m)gs\theta - 4 \frac{bmg}{r} \cos\theta \quad (1.12)$$

e, tenendo conto che il momento d'inerzia di un cilindro rispetto all'asse istantaneo di rotazione è dato da

$$I = \frac{3}{2} mr^2 \quad (1.13)$$

ci fornisce:

$$a(M + 6m) = (M + 4m)gs\theta - 4 \frac{bmg}{r} \cos\theta \quad (1.14)$$

E' interessante confrontare questa espressione dell'accelerazione con la (1.2), ottenuta nell'ipotesi che il carrello fosse approssimabile ad un punto materiale. Mettendosi nell'approssimazione dei piccoli angoli, otteniamo per questo caso:

$$a = \frac{M + 4m}{M + 6m} g\theta - 4 \frac{b}{r} \frac{m}{(M + 6m)} g \quad (1.15)$$

che di nuovo costituisce l'equazione di una retta nel piano $\mathbf{a}-\theta$. Confrontando la (1.15) con la (1.3) vediamo in primo luogo che il coefficiente angolare è nel secondo caso pari a \mathbf{g} solo nel limite in cui $\mathbf{m} \ll \mathbf{M}$. Nello stesso limite, che consideriamo ragionevole nel nostro caso, l'intercetta è identificabile con quella presente nella formula (1.3) se si definisce un coefficiente di attrito dinamico radente “efficace”:

$$\mu_d = 4 \frac{b}{r} \frac{m}{M} \quad (1.16)$$

Questo significa che nel limite in cui $\mathbf{m} \ll \mathbf{M}$, la misura di \mathbf{a} in funzione di θ permette ancora di misurare \mathbf{g} come coefficiente angolare. La misura dell'intercetta all'origine permette di ottenere un valore di μ_d che ha il significato di coefficiente “efficace” di attrito dinamico. Come abbiamo visto, quest'ultimo è in realtà dato dal prodotto di due fattori: il primo, \mathbf{b}/\mathbf{r} , rappresenta quello che nel precedente paragrafo abbiamo chiamato “squilibrio” tra compressione e rilassamento dell'attrito volvente; il secondo dipende da quanto le ruote sono massive rispetto al corpo del carrello. Nel caso del nostro carrello ci aspettiamo quindi un valore efficace di μ_d di almeno un paio di ordini di grandezza inferiore ai valori tipici di μ_d che si hanno nel caso dell'attrito radente (dell'ordine di 0.1-0.3).

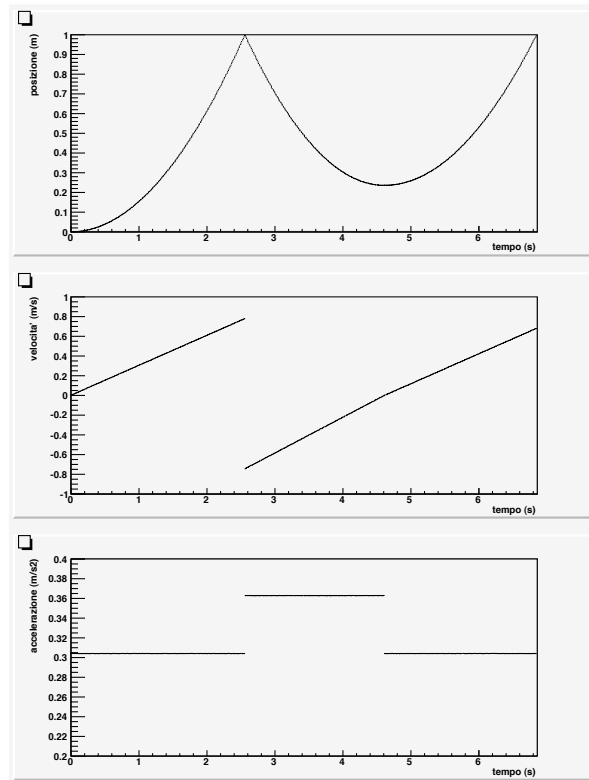


Fig.1.5 Dall'altro verso il basso: posizione, velocità ed accelerazione in funzione del tempo per un moto del carrello sul piano inclinato. Il sistema è caratterizzato dai parametri $\theta=2^\circ$ e $\mu_d=0.003$, il punto di partenza si trova a 1 m dall'ostacolo posto in fondo al piano inclinato e nell'urto, $v'/v=0.8$. Il moto è illustrato dall'inizio al secondo urto sull'ostacolo.

L'esperimento proposto consiste dunque nel lasciar cadere il carrello lungo il piano inclinato e di misurare la posizione assunta dal carrello stesso in funzione del tempo fino al momento in cui il carrello si ferma. Il moto è caratterizzato dal fatto che all'estremità inferiore del piano inclinato è posto un ostacolo sul quale il carrello urta. A seguito dell'urto il carrello risale fino a raggiungere una quota $x=l'$ diversa da quella di partenza (che abbiamo posto a $x=0$). In Fig.1.5 sono mostrate la posizione, la velocità e l'accelerazione del moto in funzione del tempo. Dai grafici è facile dedurre le varie fasi del moto sopra descritto.

1.4. Analisi delle energie dissipate.

Nel corso del processo c'è stata una dissipazione di energia. Ci sono due possibili sorgenti di dissipazione: l'eventuale anelasticità dell'urto e l'attrito tra carrello e piano. Complessivamente l'energia dissipata è data dalla differenza tra le energie potenziali all'inizio e alla fine del processo. Considerando come istanti iniziali e finali quello di partenza e quello in cui per la prima volta la velocità si annulla, l'energia dissipata è data dalla diminuzione di energia potenziale:

$$\delta E = E_{fin} - E_{in} = -Mgl' \text{sen}\theta \quad (1.17)$$

che deve essere pari alla somma dell'energia dissipata nell'urto che possiamo esprimere nella forma:

$$\delta E_{urto} = \frac{1}{2} M v'^2 - \frac{1}{2} M v^2 \quad (1.18)$$

v' e v essendo il modulo della velocità del carrello appena dopo e appena prima l'urto rispettivamente, e a quella dissipata per attrito che è pari a:

$$\delta E_{attr} = (l + l') M g \cos \vartheta \quad (1.19)$$

Tutte le grandezze presenti in queste relazioni sono misurabili e pertanto è possibile stabilire quantitativamente la frazione di energia dissipata per urto e per attrito.

(2) Studio del moto di un carrello in un piano inclinato – II

2.1 Carrello appeso all'estremità del piano inclinato con una molla.

In questa seconda parte dell'esperienza del piano inclinato, il carrello è collegato all'estremità superiore del piano inclinato attraverso una molla. Oltre alle forze che agiscono sul carrello già descritte nel precedente capitolo (forza peso e forza di attrito), entra in gioco in questo caso anche la forza di richiamo elastico della molla, che dunque rende il fenomeno completamente diverso dal punto di vista cinematico. Studieremo il fenomeno in due casi: nel caso in cui l'attrito tra carrello e piano inclinato sia dello stesso tipo di quello discusso nel capitolo precedente e nel caso in cui sia dominante un attrito di tipo "viscoso". Lo schema delle forze in gioco, valido in ambedue i casi, è illustrato nella **Fig.2.1**.

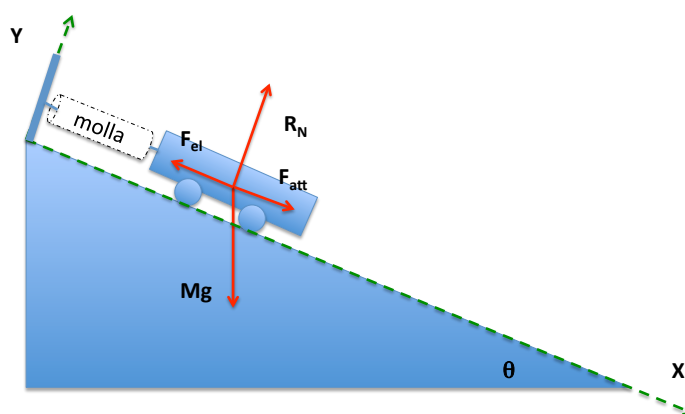


Fig.2.1 Schema delle forze che agiscono sul carrello in moto sul piano inclinato, quando è collegato ad un punto fisso per il tramite di una molla. Rispetto alla situazione della figura 1.1, è stata aggiunta la forza di richiamo elastico. I versi delle forze elastiche e di attrito dipendono dalla situazione del moto. In questo caso il carrello sta tornando verso la posizione di equilibrio muovendosi dal basso verso l'alto: la forza elastica è concorde al moto, quella di attrito vi si oppone.

In tutti i casi la forza di richiamo elastico della molla sarà data da:

$$F_{el} = -k(x - x_0) \quad (2.1)$$

in cui k è la costante di elasticità della molla, x la posizione del carrello lungo il piano e x_0 la cosiddetta posizione di riposo della molla, cioè quel valore dell'allungamento della molla per il quale si annulla la forza di richiamo. La molla è assunta ideale e di massa trascurabile.

Tratteremo dunque il moto del carrello come se si trattasse di un punto materiale soggetto alle 4 forze indicate. In primo luogo determiniamo la posizione di equilibrio x_{eq} del carrello. La presenza della forza peso fa sì infatti che la posizione effettiva di equilibrio della molla sia diversa da x_0 . Quando il carrello è fermo, non vi è forza di attrito e dunque si equilibrano forza peso e forza di richiamo elastica:

$$-k(x - x_0) + mgsen\theta = 0 \quad (2.2)$$

dunque la posizione di equilibrio si ottiene ricavando x dalla (2.2):

$$x_{eq} = x_0 + \frac{mg}{k} \text{sen}\theta \quad (2.3)$$

Il significato di questa formula è che, come già detto, la presenza della forza peso sposta da x_0 a x_{eq} la posizione di equilibrio della molla. E' interessante notare che nelle argomentazioni seguenti, possiamo di fatto inglobare completamente l'effetto della forza peso in quello della forza elastica semplicemente spostando da x_0 a x_{eq} la posizione di riposo della molla. Ciò è dovuto al fatto che la struttura della forza elastica (2.1) è del tipo $-kx + \text{costante}$. Quindi la presenza di un'ulteriore forza costante, la forza peso, non fa altro che cambiare il valore della costante.

2.2 Caso dell'attrito radente/volvente.

Supponiamo dunque che il moto del carrello sia del tipo di quello descritto nel capitolo 1, cioè sia caratterizzato da un tipo di attrito che fornisce una forza che si oppone al moto di modulo costante e proporzionale al peso del carrello:

$$F_{attr} = \mu_d Mg \cos\theta \quad (2.4)$$

dove M è la massa del carrello, θ l'angolo di inclinazione e il coefficiente di attrito dinamico può essere pensato come "efficace" nel caso di attrito volvente, secondo quanto illustrato nel paragrafo 1.3.

L'equazione del moto proiettata lungo l'asse X è data da:

$$-k(x - x_{eq}) \pm \mu_d Mg \cos\theta = Ma \quad (2.5)$$

che, in termini differenziali e mettendoci nel sistema di riferimento in cui $x_{eq}=0$, è del tipo:

$$M\ddot{x} + kx = \pm \mu_d Mg \cos\theta \quad (2.6)$$

Il \pm traduce il fatto che la forza di attrito cambia segno ad ogni semi-oscillazione. Si tratta della ben nota equazione del moto armonico ma con termine noto. Il periodo delle pseudo-oscillazioni (pseudo-periodo) è dato da:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \quad (2.7)$$

ma l'ampiezza dell'oscillazione viene riducendosi ad ogni oscillazioni.

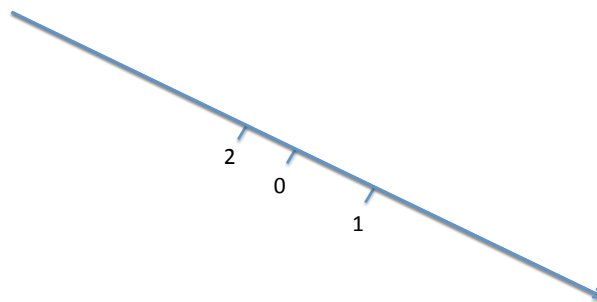


Fig.2.2 Posizione relativa dei punti 0 (posizione di equilibrio), 1 (punto di partenza del moto a velocità nulla) e 2 primo punto in cui la velocità si annulla di nuovo.

E' conveniente studiare il moto di questo sistema utilizzando il teorema dell'energia cinetica. Con riferimento alla Fig.2.2, poniamo lo 0 dell'asse X in corrispondenza della posizione x_{eq} e supponiamo di far partire la molla con velocità nulla da una posizione 1 a valle di 0. In virtù del frenamento dovuto

all'attrito, ci aspettiamo che la prima oscillazione si concluda in una posizione 2 di coordinata negativa e di modulo inferiore alla coordinata della posizione 1. Appliciamo dunque il teorema dell'energia cinetica tra i punti 1 e 2. Si deve uguagliare il lavoro fatto delle forze di attrito alla differenza tra le energie potenziali delle due posizioni. Per quanto detto in precedenza, l'energia potenziale della forza peso è già contenuta nell'energia potenziale elastica se sostituiamo x_{eq} a x_0 . Detti x_1 e x_2 i moduli delle coordinate dei punti 1 e 2, si ha:

$$-\mu_d Mg \cos \theta (x_1 + x_2) = \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

da cui

$$x_2 = x_1 - \frac{2\mu_d Mg \cos \theta}{k} \quad (2.8)$$

Ripetendo l'argomento per le oscillazioni successive, si ottiene la formula ricorsiva:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{2\mu_d Mg \cos \theta}{k} \quad (2.9)$$

o anche:

$$x_n = x_1 - \frac{2(n-1)\mu_d Mg \cos \theta}{k} \quad (2.10)$$

Quindi si avrà un moto come quello mostrato in **Fig.2.3**: oscillazioni smorzate con ampiezza decrescente linearmente. Ad ogni oscillazione, l'ampiezza diminuisce di una quantità fissa proporzionale a μ_d e inversamente proporzionale a k .

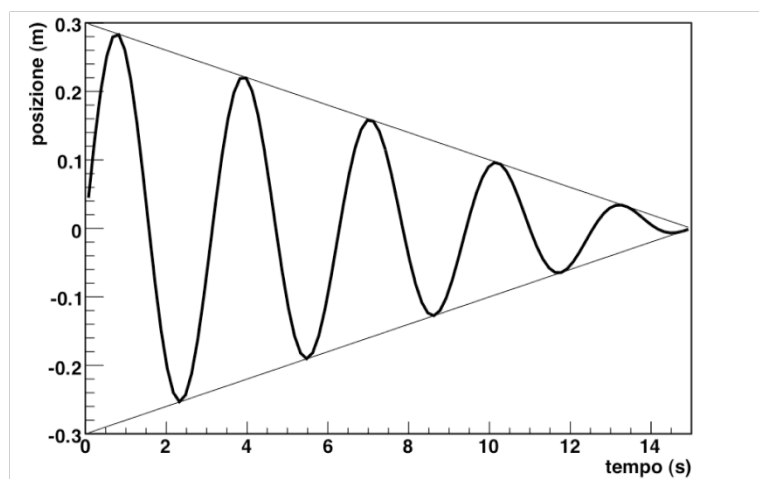


Fig.2.3 Grafico della posizione del carrello in funzione del tempo nel caso di oscillazioni smorzate con attrito radente. Le dimensioni delle oscillazioni si riducono linearmente al passare del tempo.

L'oscillazione prosegue fino a quando non si raggiunge un valore di n , diciamo n_j , per cui

$$x_{j-1} < \frac{2\mu_d Mg \cos \theta}{k} \quad (2.11)$$

A questo punto il carrello avrà terminato le sue oscillazioni, fermandosi eventualmente anche prima di aver raggiunto il valore di equilibrio $x=0$.

Il massimo numero di oscillazioni osservabili sarà:

$$n > 1 + \frac{kx_1}{2\mu_d Mg \cos \theta} \quad (2.12)$$

In realtà non è detto che si raggiunga tale numero di oscillazioni. Infatti in ogni istante in cui il carrello si ferma per invertire il suo moto, può ripartire solo se la forza di richiamo è superiore all'attrito statico che tende a mantenere a riposo il carrello stesso. Pertanto nella j -esima fermata se la coordinata della fermata soddisfa la condizione:

$$kx_j < \mu_s Mg \cos \theta \quad (2.13)$$

Il carrello rimarrà fermo.

Pertanto, detta x_∞ la coordinata della posizione in cui il carrello si ferma alla fine del suo moto di oscillazioni smorzate, i valori di x_∞ saranno compresi in un intervallo intorno allo 0 di semiampiezza determinata dai due effetti (2.11) e (2.12).

2.3 Caso dell'attrito viscoso.

Questo secondo caso differisce da quello trattato nel precedente paragrafo per il fatto che la forza di attrito è del tipo:

$$\vec{F}_{attr} = -\lambda \vec{v} \quad (2.14)$$

cioè è ancora in verso opposto al moto ma è, in modulo, proporzionale al modulo della velocità. E' il caso che si presenta quando le caratteristiche del corpo in moto sono tali da rendere significativa l'azione frenante dell'aria o del fluido nel quale il corpo si muove. E' particolarmente rilevante nel caso in cui ci si muova per esempio in acqua o in altro liquido ma può esserlo anche nel caso in cui il fluido sia semplicemente aria.

La costante di proporzionalità λ , dipende sia dalla forma del corpo che dalle caratteristiche del fluido nel quale esso si muove. Dunque la forza di attrito non è costante, ma è sempre più piccola quanto più il moto rallenta. Questa caratteristica della forza viscosa determina il fatto che le oscillazioni sono infinite.

Nel caso della forza viscosa è agevole trattare il moto direttamente risolvendo l'equazione del moto proiettata sull'asse X :

$$-k(x - x_{eq}) - \lambda v = Ma \quad (2.15)$$

che, in termini differenziali costituisce un'equazione del tipo (sempre scegliendo un sistema di riferimento nel quale $x_{eq}=0$)

$$M\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0 \quad (2.16)$$

ben nota equazione delle oscillazioni smorzate, del tutto analoga a quella che si incontra in diversi altri ambiti della fisica.

L'analisi ci insegna come si trova la soluzione di questa equazione. Si cercano soluzioni del tipo esponenziale $e^{\alpha t}$ sostituendo nell'equazione e quindi si ricavano i valori di α per cui l'equazione è soddisfatta:

$$\begin{aligned}
M\alpha^2 e^{c\alpha} + \lambda\alpha e^{c\alpha} + ke^{c\alpha} &= 0 \\
M\alpha^2 + \lambda\alpha + k &= 0 \\
\alpha_{1/2} &= \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4Mk}}{2M} = -\frac{\lambda}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2M}\right)^2 - \frac{k}{M}}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

che, posti

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\lambda}{2M} \\
\omega_0^2 &= \frac{k}{M}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

fornisce le due soluzioni

$$\alpha_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{2.19}$$

E' interessante soffermarsi sul significato fisico dei due parametri γ e ω_0 appena definiti: γ rappresenta l'intensità dello smorzamento, ω_0 è invece legato all'elasticità della molla. La "competizione" tra i due parametri determina la qualità del moto. Il carattere della soluzione dipende infatti essenzialmente dal segno del termine sotto radice. Ci limitiamo al caso più interessante, quello per cui $\gamma^2 < \omega_0^2$. Si tratta del caso in cui lo smorzamento, parametrizzato dal parametro γ , è piccolo, inferiore alla scala dell'oscillazione data dalla costante elastica della molla. In questo caso le due soluzioni della (2.17) sono numeri complessi e la soluzione generale è del tipo:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A_1 e^{-\gamma t + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + A_2 e^{-\gamma t - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} = \\
&e^{-\gamma t} [A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}] = \\
&e^{-\gamma t} [A_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + A_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t)] = \\
&e^{-\gamma t} [(A_1 + A_2) \cos \omega t + i(A_1 - A_2) \sin \omega t]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

dove abbiamo introdotto le costanti di integrazioni A_1 e A_2 che dipenderanno dalle condizioni iniziali del problema, abbiamo introdotto la pulsazione efficace o pseudo-pulsazione $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, e infine abbiamo usato le formule di Eulero per ricondurci a funzioni trigonometriche semplici. Dall'ultima delle (2.20) osserviamo che, per garantire che la soluzione sia reale, la somma $A_1 + A_2$ deve essere reale, mentre la differenza $A_1 - A_2$ deve essere immaginaria. Ciò suggerisce di porre:

$$A_1 = a + ib$$

$$A_2 = a - ib$$

da cui

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\gamma t} [2a \cos \omega t - 2b \sin \omega t] = \\
&A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

che costituisce la soluzione dell'equazione delle oscillazioni smorzate graficata in **Fig.2.4**.

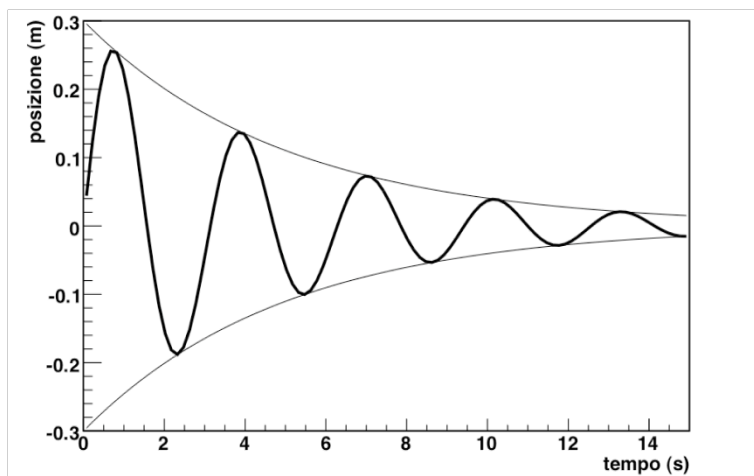


Fig.2.4 Grafico della posizione del carrello in funzione del tempo nel caso di oscillazioni smorzate con attrito viscoso. Le dimensioni delle oscillazioni si riducono esponenzialmente al passare del tempo.

In questa formula le quantità A e ϕ sono legate alle condizioni iniziali del moto, mentre γ e ω sono caratteristiche strutturali del sistema (massa, costante elastica, coefficiente di smorzamento viscoso). In questo caso il numero di oscillazioni è in linea di principio infinito dato che la riduzione dell'oscillazione non è costante come nel caso precedente, ma si riduce in modo esponenziale. Rimane invece il limite dovuto all'attrito statico, che anche in questo caso determina il valore di x_∞ . Infine si noti che lo pseudo-periodo è pari a

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\omega_0^2 - \gamma^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k - \lambda/4M}} \quad (2.22)$$

E' interessante notare che questo pseudo-periodo è pari a quello ottenuto nel capitolo 2.2 solo nel limite in cui λ è piccolo.

2.4 Considerazioni conclusive.

Nel caso dell'esperimento proposto in laboratorio, l'attrito dominante è quello radente/volvente delle ruote del carrello sul piano inclinato. Si cerca di aumentare la componente di attrito viscoso applicando sul carrello le cosiddette "vele" che hanno l'effetto di accrescere il valore di λ .

E' bene comunque notare che in tutti i casi reali, ambedue i tipi di attrito qui descritti sono in gioco, e pertanto il moto effettivo sarà una composizione di tutti gli effetti. E' tuttavia possibile mettersi in condizioni in cui l'uno o l'altro tipo di attrito prevalga e dunque sia possibile evidenziare un tipo di comportamento o l'altro. Un modo per confrontare i dati con i due andamenti previsti consiste nel

graficare l'andamento dei massimi di oscillazione in funzione del tempo: nel primo caso l'andamento sarà essenzialmente lineare, nel secondo esponenziale.

(3) Oscillazioni di un corpo rigido: il pendolo fisico.

3.1 Considerazioni generali.

In questo capitolo deriviamo le principali proprietà del moto di oscillazione di un corpo rigido qualsiasi intorno ad un asse qualsiasi. In seguito applichiamo tali proprietà a due casi particolari che si incontrano nelle esperienze di laboratorio di meccanica: il generico pendolo fisico (costituito da una bacchetta e da pesi) e il cosiddetto pendolo reversibile.

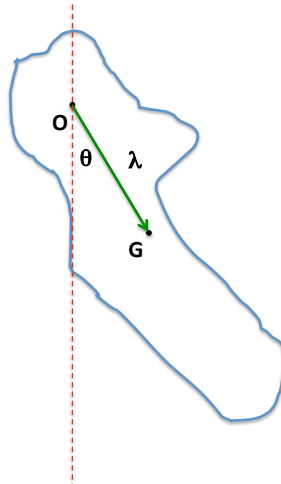


Fig.3.1 Corpo rigido di forma qualsiasi appeso per il punto O e messo in oscillazione. Sono indicati il centro di massa G , il vettore distanza tra O e G e l'angolo θ tra tale vettore e la verticale.

Consideriamo dunque un corpo rigido di forma qualsiasi e ci riferiamo allo schema mostrato in **Fig.3.1**. Chiamiamo G la posizione del centro di massa del corpo, O la posizione del polo e λ la distanza tra O e G . Immaginiamo dunque di appendere il corpo ad un perno posto in corrispondenza della posizione di O . Intendiamo studiare le caratteristiche del moto del sistema al variare della distanza λ . Scriviamo la seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi, trascurando eventuali effetti di attrito nel contatto tra perno e corpo rigido, e considerando dunque esclusivamente l'effetto della forza peso:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\lambda} \times M\vec{g} \quad (3.1)$$

in cui M è la massa del corpo rigido ed in cui abbiamo espresso sotto forma vettoriale sia λ che g . Proiettiamo l'equazione sull'asse Z normale al piano verticale contenente O e G e sul quale giacciono ambedue i vettori λ e g . Otteniamo:

$$I_o \alpha = -\lambda M g \sin \theta \quad (3.2)$$

in cui abbiamo indicato con I_o il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto a O , con α l'accelerazione angolare del sistema e con θ l'angolo tra λ e la direzione verticale. Si noti che il segno meno al secondo membro rende ragione del fatto

che il momento della forza peso tende sempre a richiamare il corpo verso la posizione di equilibrio nella quale \mathbf{O} e \mathbf{G} sono allineati sulla verticale.

Sviluppiamo l'equazione del moto nell'ipotesi di piccoli angoli, ipotesi verificata nel limite in cui è possibile sostituire il valore dell'angolo a quello del suo seno. Nel paragrafo 3.4 torneremo diffusamente sul significato e sui limiti di applicabilità di questa approssimazione. Nel limite appena detto, la (3.2) diventa:

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda Mg}{I_o} \theta = 0 \quad (3.3)$$

ben nota equazione differenziale che fornisce come soluzione l'equazione oraria del moto armonico

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (3.4)$$

in cui θ_0 e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali del moto e ω è la pulsazione, data da:

$$\omega^2 = \frac{\lambda Mg}{I_o} \quad (3.5)$$

corrispondente ad un "periodo delle piccole oscillazioni"

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{Mg\lambda}} \quad (3.6)$$

Il termine "piccole oscillazioni", si riferisce ovviamente al fatto che è quanto si ottiene per piccoli angoli. Siamo di fronte dunque ad un tipico moto di piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio. La formula (3.6) è di estrema generalità. Al suo interno compaiono i due parametri I_o e λ , rispettivamente momento d'inerzia e posizione del centro di massa, che dipendono entrambi dalla distribuzione delle masse rispetto all'asse di rotazione.

Nel seguito applichiamo la (3.6) a due sistemi fisici differenti che costituiscono entrambi possibili esperimenti di laboratorio, e infine riprenderemo l'approssimazione di piccolo angolo cui abbiamo già accennato e ne discuteremo la validità.

3.2 Misura di g con un generico pendolo fisico.

Consideriamo il sistema, che chiameremo pendolo fisico, illustrato nella **Fig.3.2**. Il sistema è costituito da una bacchetta di massa m e lunghezza L e da un cilindro cavo di massa M , altezza h e raggi interni ed esterni r_1 ed r_2 che può essere infilato dalla bacchetta e ad essa connesso con una vite. Consideriamo il pendolo in tre diverse modalità. In tutti i tre casi la bacchetta è appesa al perno del pendolo. Nella modalità (a) la bacchetta è appesa in prossimità di una sua estremità ed oscilla liberamente. Nella modalità (b) la bacchetta è ancora appesa all'estremità ma ha in questo caso il peso cilindrico connesso in modo tale che il centro del cilindro sia posto ad una distanza x dall'asse di rotazione. Nella modalità (c) infine, è la stessa bacchetta con lo stesso peso ad oscillare ma in questo caso la bacchetta è appesa al suo centro. Deriviamo dunque la formula del periodo nelle tre modalità appena descritte.

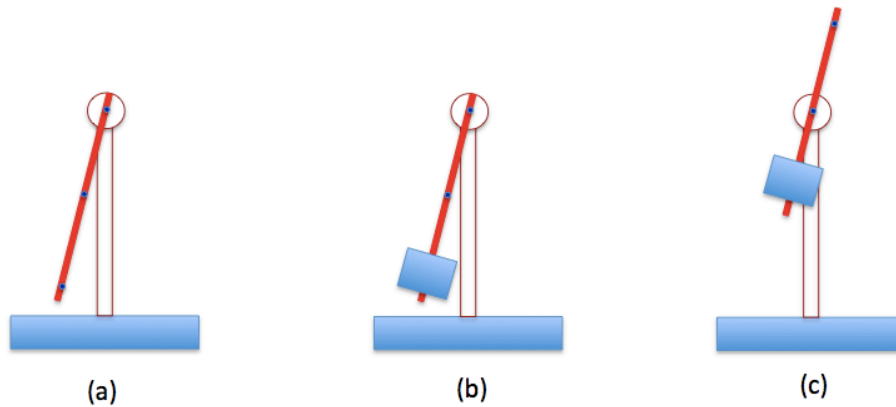


Fig.3.2 Schema dell'esperienza del pendolo nelle tre modalità descritte nel testo. In rosso la bacchetta, in azzurro il basamento e il peso.

Modalità (a).

Con riferimento alla formula (3.6) consideriamo i parametri I_0 e λ . Si tratta in questo caso del momento d'inerzia della bacchetta e della distanza del centro di massa della bacchetta dall'asse di rotazione:

$$I_0 = \frac{1}{12}mL^2 + md^2 \quad (3.7)$$

$$\lambda = d$$

in cui abbiamo indicato con d la distanza tra il foro per cui è appesa la bacchetta ed il centro di massa della bacchetta ed abbiamo utilizzato il teorema di Huygens-Steiner. La (3.6) diventa, elevando direttamente il periodo al quadrato:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m\left(\frac{L^2}{12} + d^2\right)}{mgd} \quad (3.8)$$

da cui, risolvendo rispetto a g

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(\frac{L^2}{12d} + d \right) \quad (3.9)$$

che consente, note le caratteristiche geometriche della bacchetta, di ricavare g misurando il periodo delle piccole oscillazioni. Si noti che la misura di g non dipende in questo caso dalla massa della bacchetta ma solo dalla sua geometria. Per questa via, attraverso la (3.9) si ottiene una buona misura di g , con un incertezza che può essere ben al di sotto dell'1%.

Modalità (b).

In questo caso occorre aggiungere l'effetto del peso. Le espressioni analoghe alle (3.7) sono date da (introduciamo I_{bacc} per indicare il momento d'inerzia della bacchetta rispetto al suo centro di massa):

$$\begin{aligned} I_0 &= I_{bacc} + md^2 + I_{peso} + Mx^2 \\ \lambda &= \frac{md + Mx}{m + M} \end{aligned} \quad (3.10)$$

in cui x è la distanza del centro di massa del peso dall'asse di rotazione e I_{peso} è il momento di inerzia del peso, ovvero di un cilindro cavo di raggi interni ed esterni pari a r_1 ed r_2 e di altezza h , rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa e ortogonale alla sua direttrice:

$$I_{peso} = \frac{1}{12} Mh^2 + \frac{1}{4} M(r_1^2 + r_2^2) \quad (3.11)$$

Inserendo le (3.10) nella (3.6) otteniamo una relazione del tipo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \left[\frac{a + bx^2}{c + bx} \right] \quad (3.12)$$

in cui

$$\begin{aligned} a &= I_{bacc} + md^2 + I_{peso} \\ b &= M \\ c &= md \end{aligned} \quad (3.13)$$

La (3.12) rappresenta una relazione tra il quadrato del periodo delle oscillazioni e la distanza del peso dall'asse di rotazione e può essere direttamente confrontata con i risultati sperimentali ottenuti misurando il periodo delle piccole oscillazione in funzione della posizione del peso. Il primo dei due grafici in **Fig.3.3** illustra l'andamento della (3.12) per valori dei parametri prossimi a quelli che si hanno in laboratorio.

Modalità (c).

L'unica differenza con il caso precedente è che ora l'asse di rotazione passa per il centro di massa della bacchetta e dunque $d=0$. La coordinata x è dunque in questo caso la distanza tra il centro della bacchetta e il centro del peso. Il fatto che $d=0$ semplifica alcune formule. In particolare la (3.12) assume la forma più semplice e anche più interessante dal punto di vista della possibilità di effettuare un fit lineare:

$$T^2 = 4\pi^2 \left[\frac{a}{x} + bx \right] \quad (3.14)$$

in cui

$$\begin{aligned} a &= \frac{I_{bacc} + I_{peso}}{Mg} \\ b &= \frac{1}{g} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Le formule (3.14) e (3.15) hanno un chiaro significato fisico. Al crescere di x , cioè man mano che si allontana il peso dall'asse di rotazione, il pendolo si comporta esattamente come un pendolo semplice di lunghezza x in cui il peso svolge il ruolo del punto materiale collegato all'estremità del filo, e dunque il suo periodo non dipende dalla massa delle sue parti nè dalle altre caratteristiche geometriche ma solo dalla distanza del peso dall'asse di rotazione.

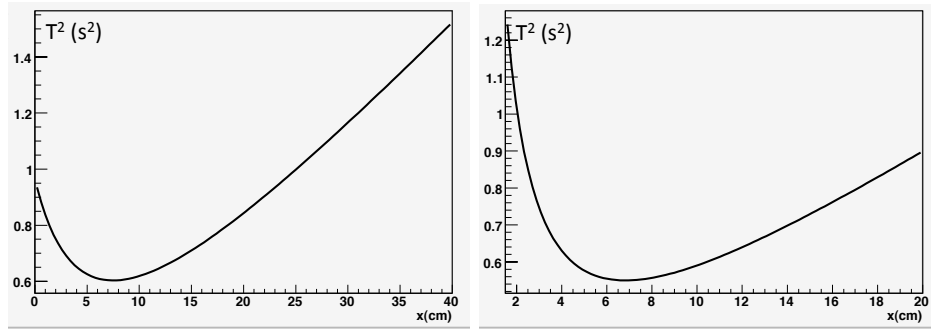


Fig.3.3 Andamento del quadrato del periodo delle piccole oscillazioni con la distanza tra la posizione del centro del peso e l'asse di rotazione nelle due modalità (b) (grafico a sinistra) e (c) (grafico a destra) descritte nel testo.

La relazione (3.14) è illustrata in **Fig.3.3**. Per entrambi i grafici di **Fig.3.3** i valori dei parametri in gioco sono simili a quelli di cui si dispone in laboratorio.

3.3 Misura di g con il pendolo reversibile.

Il pendolo reversibile costituisce un interessante caso di meccanica del corpo rigido. Infatti, sulla base di alcune proprietà del suo moto, è possibile realizzare una misura dell'accelerazione di gravità g abbastanza precisa esclusivamente sulla base di misure di distanza e intervallo di tempo. Si tratta quindi di un interessante esempio di come si possano sfruttare le proprietà di un sistema fisico per individuare un metodo di misura.

Sviluppiamo ora la formula del periodo osservando che, se introduciamo una grandezza l_e , avente le dimensioni di una lunghezza, definita come

$$l_e = \frac{I_o}{M\lambda} \quad (3.16)$$

e detta *lunghezza equivalente* del pendolo, il periodo assume la forma

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_e}{g}} \quad (3.17)$$

formalmente equivalente a quella del pendolo semplice. E' interessante considerare le proprietà della lunghezza equivalente appena definita. Scriviamo il momento d'inerzia utilizzando il teorema di Huygens-Steiner:

$$I_o = I_G + M\lambda^2 \quad (3.18)$$

intendendo con I_G il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello dato passante per il centro di massa. In questo modo la lunghezza equivalente ed il periodo assumono rispettivamente le forme

$$l_e = \frac{I_G}{M\lambda} + \lambda \quad (3.19)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_G}{M\lambda} + \lambda}$$

graficate in **Fig.3.4**. L'andamento della lunghezza equivalente con λ è di facile interpretazione. Infatti quando il polo è molto lontano dal centro di massa, il corpo rigido è approssimabile ad un punto materiale intorno a G e dunque la

lunghezza equivalente si riduce a λ stessa, e si avrà di fatto un pendolo semplice. All'avvicinarsi del polo a G, l'effetto della distribuzione delle masse comincia a farsi sentire, si passa per un minimo e si diverge per piccoli λ . La divergenza del periodo per $\lambda \rightarrow 0$ corrisponde al fatto che se appendiamo il corpo per un asse passante per G il corpo tenderà a non oscillare, perché si troverà in una situazione di equilibrio indifferente.

A questo punto possiamo fare la nostra osservazione: la formula (3.17) ci dice che se, per una data configurazione del pendolo per la quale si misura il periodo, fossimo in grado di misurare la lunghezza equivalente semplicemente misurando la distanza tra due punti, avremmo in mano un sistema per ricavare g , semplicemente da misure di lunghezza e tempo

$$g = 4\pi^2 \frac{l_e}{T^2} \quad (3.20)$$

Il pendolo reversibile permette di fare questo tipo di misura. Vediamo ora come.

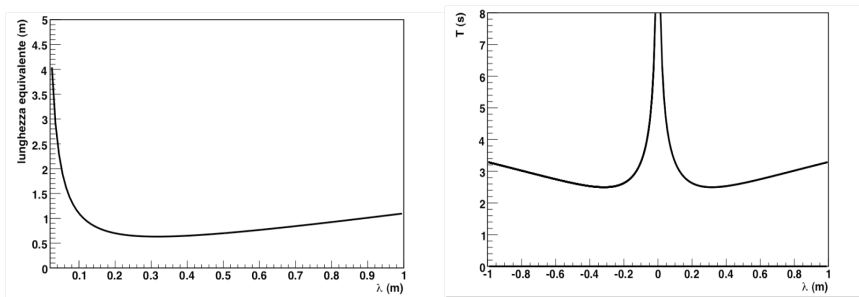


Fig.3.4 Il grafico a sinistra mostra l'andamento della lunghezza equivalente l_e in funzione della distanza λ tra polo e centro di massa. Nel grafico a destra è invece riportato il periodo delle oscillazioni del pendolo sempre in funzione di λ . Si notino i minimi simmetrici e la divergenza per valori di λ prossimi a 0.

Chiamiamo pendolo reversibile un corpo rigido di massa qualsiasi (che non è necessario conoscere) ma con proprietà di simmetria rispetto ad una direzione privilegiata, per esempio del tipo di quello mostrato in Fig.3.5. I 2 coltelli mobili consentono di appendere il corpo e di metterlo in oscillazione intorno a qualsiasi polo O lungo l'asse x definito in figura. Non è nemmeno necessario conoscere l'esatta posizione del centro di massa, occorre solo assumere che, per motivi di simmetria, esso sia posto lungo l'asse centrale del corpo. A questo punto dimostriamo una proprietà di cui la lunghezza equivalente sopra definita gode. Risolviamo l'equazione di secondo grado in λ implicita nella prima delle (3.19):

$$\begin{aligned} M\lambda_e &= I_G + M\lambda^2 \\ M\lambda^2 - M\lambda_e + I_G &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

da cui

$$\lambda_{1/2} = \frac{l_e}{2} \pm \sqrt{\frac{l_e^2}{4} - \frac{I_G}{M}} \quad (3.22)$$

per cui, indipendentemente dai valori di M e di I_G si ha:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = l_e \quad (3.23)$$

La formula (3.23) è la chiave del nostro argomento. Infatti i due valori λ_1 e λ_2 hanno in comune il fatto che appendendo il pendolo per assi passanti a queste

due distanze dal centro di massa G , il periodo è lo stesso. Dunque, se riesco a trovare due tali posizioni lungo l'asse x per le quali misuro lo stesso periodo, e ne misuro la distanza, ho di fatto trovato un modo per determinare g a partire da misure di tempo e distanza secondo la (3.20). Possibili valori di λ_1 e λ_2 con cui fare la misura sono riportati nel grafico di Fig.3.6.

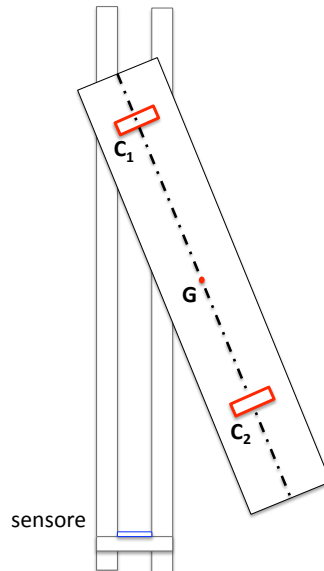


Fig.3.5 E' mostrato in modo schematico il sistema del pendolo reversibile disponibile in laboratorio. E' indicato il pendolo con il suo centro di massa G e la posizione dei due coltelli C_1 e C_2 che possono essere spostati lungo la linea tratteggiata e il sistema di supporto con il sensore per la misura del periodo delle oscillazioni.

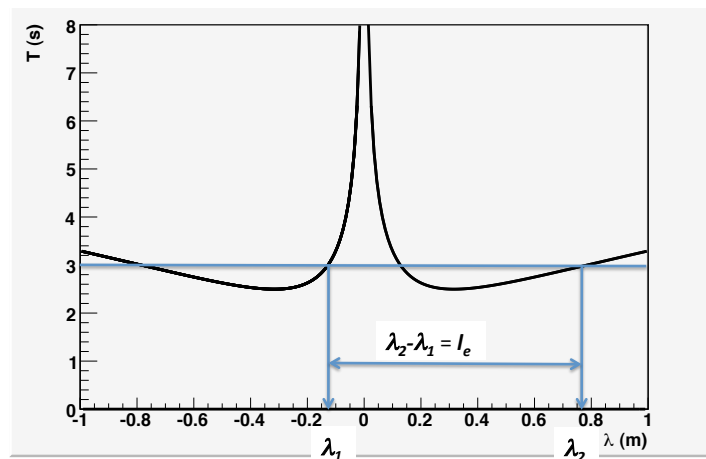


Fig.3.6 Andamento del periodo delle oscillazione con la distanza λ tra centro di massa e polo (come in Fig.3.2). Sono indicati due valori di λ corrispondenti allo stesso periodo $T = 3$ s. La somma dei valori assoluti delle due posizioni corrisponde alla lunghezza equivalente l_e . Dai valori di T e di l_e si ricava g secondo la (3.11).

3.4 L' approssimazione di piccolo angolo.

Nel passare dalla (3.2) alla (3.3) abbiamo fatto l' approssimazione di piccolo angolo che consiste in sostanza nell' identificare l' angolo con il suo seno:

$$\text{sen}\theta \approx \theta \quad (3.24)$$

Solo in base a tale approssimazione l' equazione differenziale (3.3) diviene facilmente risolvibile e fornisce la ben nota soluzione del cosiddetto moto

armonico semplice. Ci chiediamo ora in quale limite l'approssimazione data dalla (3.24) sia ragionevolmente valida e cosa dobbiamo aspettarci di vedere nel caso in cui non sia valida.

La **Fig.3.7** mostra in funzione dell'angolo θ la differenza relativa tra seno e angolo. Si vede che per angoli al di sotto di circa 15 gradi, il seno differisce dall'angolo per meno dell'1% e che al di sotto di circa 5 gradi la stessa differenza è al di sotto dello 0.1%. Questo significa che se intendiamo fare delle misure con incertezze al livello del %, dobbiamo limitarci ad oscillazioni al di sotto dei 10 gradi. Se invece la nostra incertezza deve essere tenuta al di sotto del permille come avviene nel caso di misure di grande precisione, occorre effettuare misure di oscillazioni al livello del grado oppure occorre tenere conto delle correzioni.

Il problema del moto del pendolo non è risolvibile analiticamente se non si fa l'approssimazione di piccole oscillazioni. Esistono soluzioni numeriche o soluzioni analitiche ma solo per approssimazioni successive. Per esempio se si approssima il seno fino al secondo ordine dello sviluppo in serie, cioè si aggiunge il termine cubico alla (3.24):

$$\text{sen}\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} \quad (3.25)$$

si ottiene una soluzione nella quale il periodo dipende dall'angolo massimo di oscillazione θ_0 , secondo l'espressione

$$T(\theta_0) = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (3.26)$$

Qui T_0 è il periodo delle piccole oscillazioni, per esempio quello dato dalla (3.6) nel caso più generale di pendolo fisico.

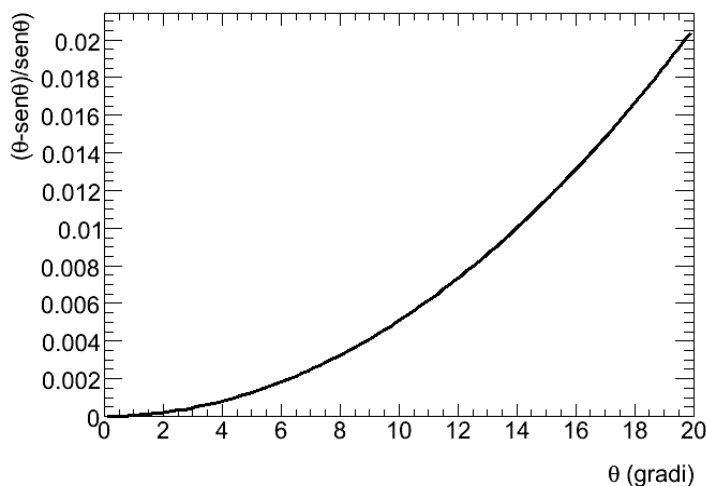


Fig.3.7 In funzione dell'angolo espresso in gradi, la differenza relativa tra seno e angolo, che indica il grado di errore sistematico dovuto all'approssimazione di piccolo angolo.

Dunque per una misura di precisione dell'accelerazione di gravità con un pendolo, si può operare come segue: si effettuano misure di periodo nella stessa condizione (per esempio la modalità (a) del pendolo fisico) per diversi valori dell'angolo θ_0 , e si fa un grafico del periodo in funzione di $\text{sen}^2(\theta_0/2)$. Si dovrebbe ottenere una retta la cui intercetta all'origine è, secondo la (3.26), il valore di T_0 che, a mezzo della (3.6), ci permette di ricavare g .

Si noti infine che in tutta la trattazione fatta finora abbiamo trascurato lo smorzamento del pendolo, smorzamento che può aver luogo sia per l'attrito dell'aria che per l'attrito nel perno di rotazione. Tale smorzamento si traduce nel fatto che l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce secondo le modalità descritte nel capitolo 2 a proposito della molla sul carrello.

(4) Studio del moto di un volano.

Il volano, o volano d'inerzia, costituisce un sistema fisico, particolarmente semplice da realizzare, che permette di evidenziare diversi aspetti della meccanica del punto e dei sistemi. Il moto di un volano può essere infatti descritto impostando due equazioni del moto accoppiate: una di un corpo assimilabile ad un punto materiale e l'altra di un secondo corpo assimilabile ad un corpo rigido. La misura della cinematica del moto del sistema permette di ricavare con procedimenti standard di analisi dati, alcune caratteristiche dinamiche del sistema, quali il momento d'inerzia e il momento delle forze resistenti.

Risolveremo il problema, sulla linea di quanto visto nel capitolo 2, in due casi: il caso in cui l'unica forma di attrito che il volano subisce è quella delle forze resistenti sul perno del moto di rotazione, e il caso in cui vi siano anche delle forze di attrito viscoso.

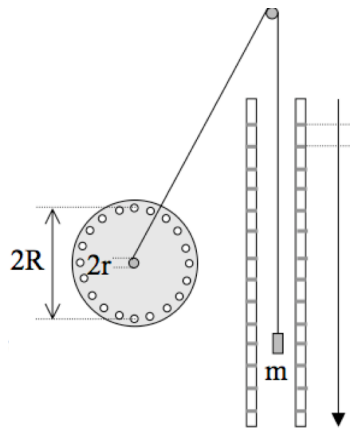


Fig.4.1 Schema dell'apparato per l'esperimento del volano. E' indicato anche l'asse verticale X orientato verso il basso.

Con riferimento alla **Fig.4.1** chiameremo: m la massa del peso, I il momento d'inerzia del volano intorno ad un asse ad esso ortogonale e passante per il suo centro di massa, M_a il momento costante delle forze resistenti, r il raggio della puleggia su cui si avvolge il filo a cui è connessa la massa m , R la distanza del centro di ciascun foro dal centro del volano e infine μ la massa di ciascun bullone che si può inserire nei fori del volano. Assumeremo che il filo che collega il volano alla massa sia inestensibile e di massa trascurabile. Vedremo nel seguito cosa comporta una tale assunzione.

4.1 Moto del volano in assenza delle palette.

Scriviamo dunque le equazioni del moto del sistema.

Consideriamo dapprima la massa. Sulla massa agiscono la forza peso diretta verso il basso e la tensione del filo che sarà diretta verticalmente verso l'alto. Proiettiamo direttamente l'equazione del moto sull'asse verticale x diretto verso il basso:

$$ma = mg - T_1 \quad (4.1)$$

in cui T_1 è appunto il modulo della tensione del filo.

Per il volano, trattandosi di un corpo rigido vincolato a ruotare intorno ad un punto in quiete, useremo la seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi, con il punto O come polo. Essendo il polo O coincidente con il centro di massa del volano, il momento della forza peso sarà nullo e dunque dovremo considerare esclusivamente il momento della forza di tensione del filo (che chiameremo T_2) e il momento delle forze resistenti di attrito. Detta α l'accelerazione angolare del sistema, e proiettando direttamente l'equazione sulla direzione ortogonale al piano del volano, avremo:

$$I\alpha = rT_2 - M_a \quad (4.2)$$

A questo punto mettiamo in campo le ipotesi che abbiamo fatto sul filo. L'essere il filo di massa trascurabile e inestensibile implica infatti da un lato che la tensione è la stessa in ciascuna sezione del filo, e dall'altro che l'angolo di cui si svolge il filo nella puleggia corrisponde all'innalzamento o abbassamento della massa. Avremo quindi le due relazioni:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 = T \\ a &= \alpha r \end{aligned} \quad (4.3)$$

con le quali il nostro sistema è dato da due equazioni nelle due incognite a e T :

$$\begin{aligned} ma &= mg - T \\ \frac{I}{r}a &= rT - M_a \end{aligned} \quad (4.4)$$

Risolvendo otteniamo per l'accelerazione con cui la massa scende:

$$a = \frac{mgr^2 - rM_a}{I + mr^2} \quad (4.5)$$

che ci dice che il moto di discesa della massa è un moto uniformemente accelerato. E' interessante notare che la formula (4.5) nel limite in cui non vi è alcun momento resistente nel volano si riduce a

$$a = g \frac{mr^2}{I + mr^2} \quad (4.6)$$

che a sua volta diventa g quando il momento d'inerzia del volano è trascurabile rispetto alla massa e tende a 0 quando il momento d'inerzia è predominante rispetto alla massa del peso moltiplicata per il quadrato del raggio della puleggia (mr^2).

La tensione del filo è invece data da:

$$T = \frac{mgI - mrM_a}{I + mr^2} \quad (4.7)$$

L'aggiunta di n coppie di bulloni nei fori del volano ha l'effetto di modificare il momento d'inerzia del volano stesso, secondo la relazione:

$$I = I_0 + 2n\mu R^2 \quad (4.8)$$

in cui I_0 è il momento d'inerzia del volano in assenza di bulloni. Assumeremo che i bulloni siano inseriti a coppie in posizioni simmetriche per evitare che il centro di massa del volano si sposti rispetto all'asse di rotazione. E' interessante inserire la relazione (4.8) nell'espressione (4.5) per ricavare l'andamento dell'accelerazione al variare del numero di coppie di bulloni inseriti. Passando all'inverso delle accelerazioni si ottiene:

$$\frac{1}{a} = \frac{I_0 + mr^2}{mgr^2 - rM_a} + n \frac{2\mu R^2}{mgr^2 - rM_a} \quad (4.9)$$

Un esempio di dipendenza dell'inverso di accelerazione dal numero di bulloni è riportato in **Fig.4.2** per valori tipici dei parametri in gioco. Nel seguito vedremo come utilizzare questa relazione per ricavare sperimentalmente il momento d'inerzia e il momento delle forze di attrito del volano.

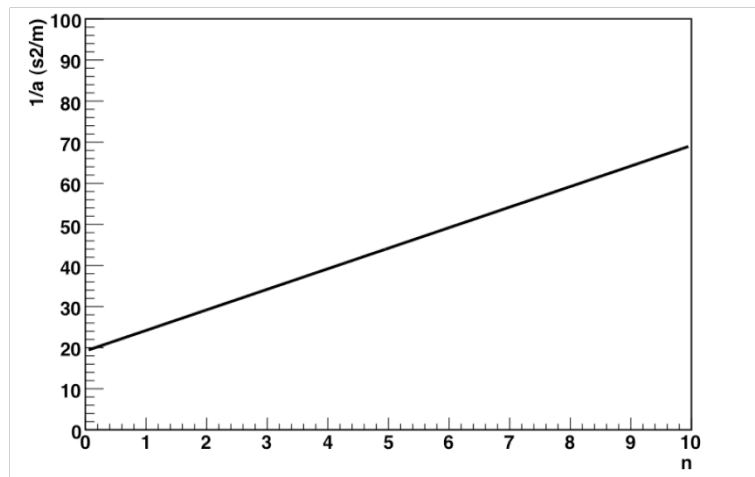


Fig.4.2 Andamento atteso dell'inverso dell'accelerazione in funzione del numero di coppie di bulloni. I parametri utilizzati sono quelli che tipicamente si hanno in laboratorio. Si noti l'andamento rettilineo con la pendenza e l'intercetta chiaramente evidenziabili.

4.2 Moto del volano in presenza delle palette.

L'inserimento delle cosiddette "palette" nei fori dei bulloni del volano, ha lo stesso effetto dell'uso della "vela" nell'esperienza del carrello. Essenzialmente si passa ad una situazione nella quale l'attrito viscoso incide nel moto del sistema. Riprendiamo dunque lo stesso schema del precedente paragrafo aggiungendo soltanto alla seconda delle (4.4) un momento resistente del tipo:

$$M_v = -k\omega \quad (4.10)$$

dove ω è la velocità angolare del volano, che, sempre per l'ipotesi di filo inestensibile, è legata alla velocità v della massa dalla relazione

$$v = \omega r \quad (4.11)$$

La costante k ha un significato analogo a quella della costante λ introdotta nella (2.33): dipende dunque dalle caratteristiche delle palette montate e dal mezzo in cui si muovono.

Procedendo come per la risoluzione del sistema (4.4), si perviene all'equazione del moto

$$\left(\frac{I}{r} + mr\right)a + \frac{k}{r}v + M_a = mgr \quad (4.12)$$

Dunque, come del resto ampiamente intuitivo, non siamo più di fronte ad un moto uniformemente accelerato, ma siamo di fronte ad un'equazione differenziale in v che risolviamo con il metodo della separazione delle variabili. Procediamo alla risoluzione attraverso i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} (I + mr^2) \frac{dv}{dt} &= mgr^2 - kv - rM_a \\ \int_0^v \frac{(I + mr^2)dv'}{mgr^2 - kv' - rM_a} &= \int_0^t dt' \\ \ln\left(\frac{mgr^2 - kv - rM_a}{mgr^2 - rM_a}\right) &= -\frac{k}{I + mr^2}t \end{aligned} \quad (4.13)$$

Esplicitando rispetto a v e passando all'esponenziale abbiamo dunque la soluzione:

$$v(t) = v_{lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (4.14)$$

in cui abbiamo definito i 2 parametri che caratterizzano il moto:

$$\begin{aligned} v_{lim} &= \frac{mgr^2 - rM_a}{k} \\ \tau &= \frac{I + mr^2}{k} \end{aligned} \quad (4.15)$$

La dipendenza della velocità dal tempo per questo caso è illustrata dal grafico in **Fig.4.3**, dove sono anche indicati graficamente i significati sia di v_{lim} che di τ . E' interessante notare che la velocità limite raggiunta dalla massa nella sua caduta non dipende dal momento d'inerzia del volano, ma unicamente dagli agenti frenanti, sia radenti che viscosi. Viceversa la "costante di tempo" τ non dipende dal momento resistente.

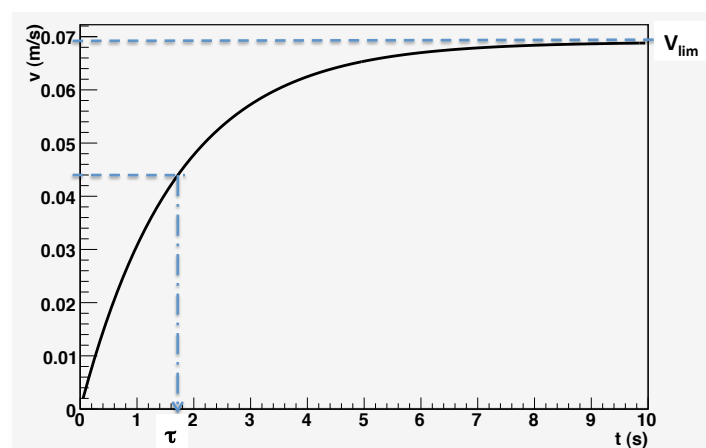


Fig.4.3 Andamento della velocità di caduta del grave in funzione del tempo nel caso di volano con le "palette". Sono evidenziati i significati grafici dei parametri v_{lim} e τ che devono essere determinati sperimentalmente.

4.3 Studio sperimentale del moto di un volano.

Il moto del volano viene studiato sperimentalmente misurando la posizione della massa m in funzione del tempo con un rivelatore opportuno. La misura della posizione $\mathbf{x}(t)$ permette di ricavare agevolmente sia il profilo della velocità $\mathbf{v}(t)$ che quello dell'accelerazione. Assumiamo dunque di effettuare due serie di misure:

(A) con il volano senza palette ma con un numero n crescente, diciamo da 0 a 4, di coppie di bulloni,

(B) con il volano con le palette e senza bulloni.

Nel caso della misura (A) ci aspettiamo di osservare dei moti uniformemente accelerati con accelerazioni dati dalle (4.5) e (4.9). Nel caso invece della misura (2) ci aspettiamo un moto del tipo dato dalla (4.14).

Come già accennato, la formula (4.9) è particolarmente interessante. Infatti è una formula del tipo:

$$\frac{1}{a} = A + nB \quad (4.16)$$

per cui il grafico dell'inverso delle accelerazioni in funzione di n permette con un fit rettilineo di ricavare A e B che a loro volta sono legati (secondo la (4.9)) a quantità incognite che vogliamo misurare. In particolare si ha:

$$I_0 = 2\mu R^2 \frac{A}{B} - mr^2$$
$$M_a = mgr - \frac{2\mu R^2}{rB} \quad (4.17)$$

dalle quali è possibile ricavare le due caratteristiche del volano, I_0 ed M_a .

Nel caso della misura (B), dal grafico della velocità in funzione del tempo, è possibile ricavare i due parametri v_{lim} e τ . Da v_{lim} , utilizzando la prima delle (4.15) è possibile ricavare k .

(5) Legge di svuotamento di un condotto attraverso capillari.

L'ultimo sistema che consideriamo è illustrato nella figura 5.1. Una provetta di sezione S disposta verticalmente, contiene un liquido che inizialmente la occupa fino ad una quota $x=h_0$, x essendo la coordinata verticale orientata verso l'alto. Alla quota $x=0$ è posto un orifizio al quale possono essere collegati tubicini capillari di diverse sezioni e lunghezze. Tra l'orifizio e il capillare è posto un rubinetto che assumiamo inizialmente chiuso. All'istante di tempo $t=0$ il rubinetto viene aperto ed il liquido inizia a fluire attraverso il capillare. All'uscita dal capillare il liquido cade in un recipiente posto sopra una bilancia che dunque misura la funzione $m(t)$, massa di liquido in funzione del tempo. Ci poniamo dunque il problema di prevedere la forma e le caratteristiche della funzione $m(t)$, sulla base della dinamica dei fluidi. Per arrivare a $m(t)$ procederemo nel modo seguente: dopo una breve introduzione su alcune caratteristiche generali dei liquidi, deriveremo le proprietà della dinamica dei cosiddetti **liquidi ideali**; quindi passeremo a considerare il fenomeno della **viscosità** e deriveremo le proprietà del moto dei **liquidi reali** nei due diversi regimi, quello **laminare** e quello **turbolento** o vorticoso; alla fine, riprendendo le caratteristiche ottenute, procederemo a derivare la funzione $m(t)$ per i casi detti che sarà possibile confrontare con i valori ottenuti sperimentalmente.

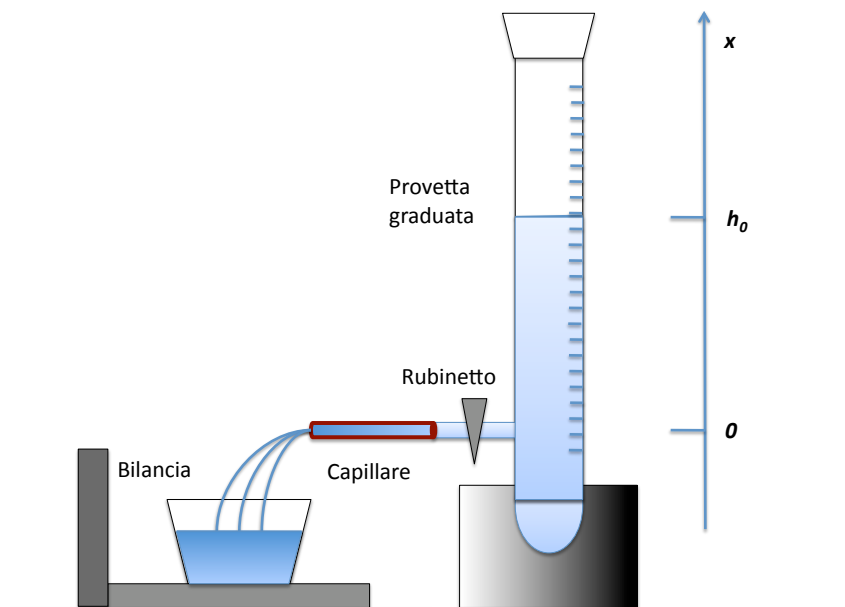


Fig.5.1 Schema dell'apparato per la misura della legge di svuotamento dei capillari.

5.1 Generalità sui liquidi: i liquidi ideali.

Le caratteristiche fondamentali che individuano i liquidi, e li differenziano dai gas sono le seguenti: alto grado di mobilità e scorrevolezza tra le parti che lo compongono, sostanziale incompressibilità. I liquidi tendono ad assumere la forma del recipiente nel quale sono contenuti, ma, a differenza dei gas, hanno volume proprio in quanto sono scarsamente comprimibili.

La trattazione sia della statica che della dinamica dei liquidi è basata sulla nozione di volume elementare di liquido dV : detta ρ la densità del liquido, il volume elementare ha massa $dm = \rho dV$. Su tale volume elementare che immaginiamo per semplicità di forma cubica, agiscono due tipi di forze: le **forze di volume** e le **forze di superficie**.

Consideriamo dapprima le forze di volume. Una generica forza di volume dF che agisce sull'elemento di volume sarà del tipo:

$$\vec{dF} = \vec{\gamma} dV \quad (5.1)$$

in cui il vettore γ è diverso a seconda del tipo di forza. La caratteristica della forza di volume è dunque quella di essere proporzionale al volume e di non dipendere dal contatto con i volumi vicini. E' dunque essenzialmente dovuta ad una causa esterna al liquido stesso cioè alle condizioni in cui il volume si trova. Due esempi di forze di volume, ambedue proporzionali alla massa, sono la forza peso e la forza centrifuga. Il vettore γ è pari a ρg nel caso della forza peso o a $\rho \omega r$ nel caso della forza centrifuga.

Le forze di superficie sono invece legate al contatto tra un elemento di volume e i suoi vicini. Con riferimento alla superficie di separazione tra due elementi, si potranno sviluppare forze aventi direzione normale alla superficie, o parallela. Nel primo caso si parla di **forze di pressione**, nel secondo, di **sforzi di taglio**. Definiamo la pressione p e lo sforzo di taglio T nel modo seguente: dette rispettivamente F_n e F_t le componenti normale e tangenziali delle forze di contatto tra due elementi di volume, si ha

$$\begin{aligned} p &= \frac{dF_n}{dS} \\ T &= \frac{dF_t}{dS} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ambedue le grandezze qui definite hanno le dimensioni di una forza per unità di superficie.

Nel caso di un liquido in quiete, si hanno solo forze di pressione. Infatti gli sforzi di taglio intervengono solo quando si hanno dei moti di scorrimento di elementi di liquido rispetto ad altri. D'altro canto le forze di pressione risultano indipendenti dalla direzione della normale all'elemento di liquido considerato e quindi, in virtù di tale proprietà è possibile definire una pressione scalare p , funzione delle coordinate all'interno del liquido stesso.

Nel caso invece di un liquido in moto, dovranno essere considerati anche gli sforzi di taglio. Chiameremo liquidi ideali quei liquidi che, in moto, presentano sforzi di taglio nulli o trascurabili. Si tratta ovviamente di una schematizzazione di chiaro significato fisico: l'assenza di sforzi di taglio tra elementi di volume contigui, comporta l'assenza di forze di attrito nello scorrimento di strati di liquido contigui. La situazione dei liquidi ideali è dunque in tutto simile a quella del moto di un corpo solido su un supporto liscio privo di attrito: in quel caso l'unica forza tra corpo e supporto è la reazione vincolare normale alla superficie, analogamente in questo caso si hanno solo le forze di pressione normali alla superficie di separazione tra elementi di liquido.

Sulla base delle considerazioni fatte formuliamo dunque le caratteristiche che assumeremo per i liquidi ideali:

→ totale incomprimibilità (la densità è dunque costante in tutto il volume del liquido);

→ assenza di attriti interni ($T=0$ nel corso del moto del liquido).

La seconda caratteristica è quella cruciale che determina la differenza nel moto in un condotto tra liquidi ideali e reali.

5.2 Moto di un liquido ideale in un condotto.

Consideriamo dunque un condotto e un liquido ideale che fluisce in tale condotto. Nella trattazione di tale moto immaginiamo che ogni posizione all'interno del liquido, specificata dalle coordinate x , y e z , sia caratterizzato da una certa velocità $\mathbf{v}(x,y,z,t)$, funzione della posizione e del tempo. In ogni istante di tempo dunque, per ogni posizione vi è un valore univoco di velocità. Tale funzione caratterizza completamente il moto del liquido. In ciascuna posizione transiteranno diversi elementi di volume. Se \mathbf{v} non dipende esplicitamente dal tempo t , in ciascuna posizione si avrà sempre la stessa velocità. In tal caso diremo che il moto è **stazionario**.

Vediamo ora alcune proprietà di un tale moto, definendo alcune importanti nozioni.

In primo luogo, il fatto che ad ogni istante di tempo t , ciascun punto sia caratterizzato ad uno ed un solo vettore velocità, permette di descrivere graficamente il moto del liquido introducendo le nozioni di **linea di flusso** e **tubo di flusso**. Intenderemo con linea di flusso una qualsiasi linea che ha la proprietà che in qualunque punto è tangente al vettore velocità in quel punto. Ad un dato istante di tempo, le linee di flusso non si intersecano. Infatti, se due linee di flusso si intersecassero in un punto, ciò implicherebbe l'esistenza di due vettori di velocità differenti nello stesso punto. Quindi dobbiamo immaginare le linee di flusso come "parallele". A questo punto possiamo prendere un certo numero di tali linee per costruire un tubo di flusso, che delimita dunque una porzione di liquido. Nessun elemento del liquido può passare attraverso il tubo di flusso. La situazione è illustrata nella Fig.5.2.

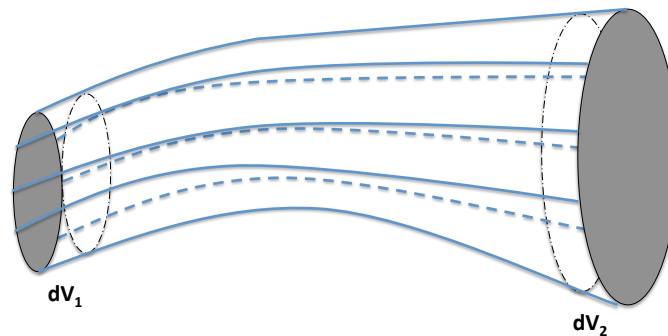


Fig.5.2 Rappresentazione schematica di un tubo di flusso. Sono indicati i volumetti infinitesimi dV_1 e dV_2 di ugual massa collocati alle due estremità del tubo. Per ciascuna estremità sono rappresentate le superfici relative ai tempi t e $t+dt$.

Consideriamo ora il moto di un liquido all'interno di un tubo di flusso. Per esempio possiamo immaginare che tale tubo coincida con le pareti del condotto, ma ciò non è necessario. Consideriamo i due istanti di tempo, t e $t+dt$. Nell'intervallo di tempo dt che stiamo considerando, il liquido si sarà spostato come in figura. Tutto va come se il volume infinitesimo dV_1 si fosse spostato ad

occupare il volume infinitesimo dV_2 . Le masse dm_1 e dm_2 corrispondenti ai due volumi devono essere uguali se assumiamo che nel condotto non ci sono sorgenti né pozzi, in altre parole se, come abbiamo prima detto, nessun elemento di liquido può transitare attraverso le pareti del tubo di flusso. Dette S_1 (S_2) e v_1 (v_2) le superfici e le velocità corrispondenti alle posizioni dei due volumi elementari dV_1 e dV_2 , e detta ρ la densità del liquido, che è costante nell'ipotesi di liquidi ideali, si avrà:

$$\rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt \quad (5.3)$$

che, definendo la **portata volumetrica**

$$Q_V = Sv \quad (5.4)$$

implica la conservazione della portata volumetrica lungo il moto del liquido ideale in un condotto. E' possibile definire in modo analogo la **portata di massa**

$$Q_M = \rho Sv \quad (5.5)$$

che è la quantità che si conserva nel caso in cui la densità non è costante. Si noti che in questo caso abbiamo ipotizzato che la velocità di tutti gli elementi di liquido in una delle sezioni considerate, siano uguali in modulo e parallele. Qualora ciò non fosse realizzato, è possibile comunque definire una portata volumetrica (o di massa), integrando sulla superficie la velocità espressa in funzione della coordinata sulla superficie.

$$Q_V = \int_S v(x,y,z) dS' \quad (5.6)$$

La conservazione della portata implica che in corrispondenza di qualunque restringimento di un condotto (diminuzione della sezione S), si ha un aumento di velocità. Utilizzeremo nel seguito questo risultato di estrema generalità in diverse circostanze.

Nel caso in cui il condotto non sia orizzontale, osserviamo che entra in gioco anche la forza peso. Deriviamo dunque una legge generale valida per i liquidi ideali, che permette di individuare una quantità che si conserva nel corso del moto di un liquido ideale in un condotto qualsiasi. Tale legge va sotto il nome di **Teorema di Bernoulli**.

Sempre con riferimento alla figura 5.2 e detta z la coordinata verticale, consideriamo di nuovo un tubo di flusso e la situazione a due istanti successivi separati da dt . Come nella discussione precedente osserviamo che tutto va come se il liquido contenuto nel volume dV_1 si trasferisse nel volume dV_2 . Applichiamo a questo processo il teorema dell'energia cinetica. Uguagliamo cioè la variazione dell'energia cinetica nel passaggio dallo stato 1 allo stato 2, al lavoro fatto da tutte le forze che agiscono sul liquido, sia di volume che di superficie.

Unica forza di volume in gioco è la forza peso. Il lavoro fatto dalla forza peso è pari alla variazione dell'energia potenziale cambiata di segno:

$$L_g = -\Delta E_p = (z_1 - z_2) g dm \quad (5.7)$$

Ci si può convincere facilmente che tra le forze di superficie, le uniche che fanno lavoro sul liquido, sono le forze di pressione ai due estremi del tubo di flusso. Infatti, trattandosi di un liquido ideale non si hanno sforzi di taglio, e d'altra parte, le forze di pressioni con le pareti del condotto, pur essendo diverse da 0 non compiono lavoro dato che sono ortogonali alla velocità del liquido stesso. Dette p_1 e p_2 le pressioni del liquido ai volumi dV_1 e dV_2 , il lavoro fatto dalle forze di pressione è dato da:

$$L_p = (p_1 - p_2)dV = (p_1 - p_2) \frac{dm}{\rho} \quad (5.8)$$

La variazione di energia cinetica è data da:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}v_2^2 dm - \frac{1}{2}v_1^2 dm \quad (5.9)$$

per cui, uguagliando la variazione di energia cinetica alla somma dei lavori fatti sul sistema, ed eliminando dm , otteniamo:

$$\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 = (z_1 - z_2)g + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \quad (5.10)$$

da cui, separando i termini con suffisso 1 da quelli con suffisso 2 l'equazione:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{g\rho} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{g\rho} + z_2 \quad (5.11)$$

che, dovendo valere qualunque siano le posizioni 1 e 2 lungo il condotto, ha il significato di una legge di conservazione. La quantità che si conserva è la somma di tre termini, tutti aventi le dimensioni di una lunghezza. Il primo termine costituisce la cosiddetta **altezza di arresto**, che deve il suo nome alla circostanza di essere pari all'altezza raggiunta da un grave lanciato in alto con velocità v ; il secondo termine è detto **altezza piezometrica**, il terzo è invece l'altezza propriamente detta, lungo la verticale.

Dunque, ricapitolando, per un liquido ideale, nel moto lungo un condotto di forma qualsiasi, la somma delle tre altezze dette si conserva.

Consideriamo ora due casi particolari, conseguenza del teorema di Bernoulli. Il primo caso è quello illustrato dalla **Fig.5.1** se pensiamo di togliere il capillare e lasciare dunque il liquido fluire direttamente dall'orifizio praticato alla quota $z=0$. Prendiamo come posizioni 1 e 2 rispettivamente il pelo del liquido, e l'orifizio. Nelle due posizioni si ha la stessa pressione, pari alla pressione atmosferica. Dunque $p_1=p_2$. La (5.11) ci fornisce quindi:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = z_1 \quad (5.12)$$

da cui, ricordando che la portata volumetrica deve conservarsi e che dunque

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (5.13)$$

si ricava la velocità con cui il pelo del liquido scende:

$$\frac{v_1^2}{2g} \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] = z_1 \quad (5.14)$$

da cui l'equazione differenziale (nell'approssimazione $S_1 \gg S_2$)

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} \sqrt{h} \quad (5.15)$$

Nel seguito vedremo che si tratta formalmente della stessa equazione che ci aspettiamo nel caso di svuotamento in regime di moto turbolento, e vedremo la soluzione di tale equazione.

Come seconda conseguenza della (2) consideriamo il caso in cui il condotto sia orizzontale. In tal caso a conservarsi è la quantità:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} \quad (5.16)$$

e quindi nel caso di sezione costante, il liquido fluisce mantenendo la stessa velocità e la stessa pressione. Si noti come questa conclusione sia completamente contraria all'esperienza. Infatti, l'esperienza con i liquidi reali ci dice che il flusso di un liquido in un condotto orizzontale comporta una caduta di pressione, per cui, per mantenere il liquido in movimento occorre fornire dall'esterno la pressione mancante. Vedremo nel seguito come questo risultato emerge in modo del tutto naturale quando si introduce il fenomeno della viscosità.

Anche in questo caso vi è una stretta analogia con il moto di un corpo solido su un piano orizzontale. In quel caso, in assenza di attrito, non occorre compiere lavoro per mantenere il corpo in moto rettilineo ed uniforme. Lo stesso accade per il moto di un liquido ideale in un condotto orizzontale: non occorre fornire una differenza di pressione per mantenerlo in moto stazionario.

5.3 Il fenomeno della viscosità.

Per descrivere il fenomeno della viscosità e per definire il coefficiente di viscosità η , è conveniente riferirsi in primo luogo al caso descritto nella **Fig.5.3**: sulla superficie di una "piscina" di profondità h viene spinta con una forza F costante, una lastra solida di superficie S . Sappiamo che per mantenere in moto la lastra (possiamo immaginare una barca) è necessario utilizzare un motore che eserciti la forza necessaria al moto. Nel momento in cui la forza cessasse di agire ci aspettiamo che la barca tenderà a rallentare e quindi fermarsi.

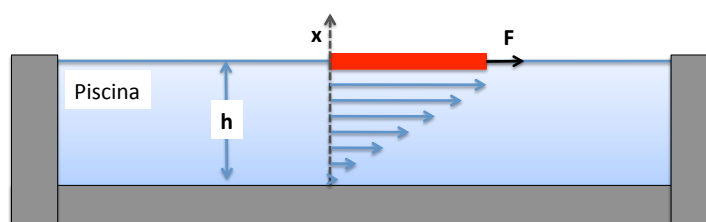


Fig.5.3 Esperimento concettuale per mettere in evidenza il fenomeno della viscosità. La barca che viene spinta sulla superficie della piscina è indicata in rosso. Le frecce indicano le velocità di movimento di ciascun strato elementare di fluido.

Per trattare questo caso immaginiamo il liquido della piscina costituito da una successione di strati che scorrono gli uni sugli altri come in figura. Lo strato superiore è a contatto con la superficie della lastra, quello inferiore con il fondo della piscina. Nel caso di liquido ideale, l'assenza di sforzi di taglio fa sì che nella superficie di contatto tra lastra e strato superiore non vi sia alcuna forza parallela al moto, e dunque la lastra possa muoversi liberamente lasciando in quiete il primo strato e, con lui, tutti gli altri strati. Se invece immaginiamo che vi siano delle forze di taglio parallele al moto, dobbiamo pensare che ciascuno strato, sia sollecitato a muoversi longitudinalmente, dall'azione di trascinamento dello strato ad esso superiore, e che, nello stesso tempo eserciti una forza sullo strato ad esso inferiore. Le due forze sono contrarie in verso e uguali in modulo a meno di infinitesimi. Pertanto ciascuno strato si muoverà di moto uniforme. Lo strato superiore sarà direttamente trascinato dalla lastra, possiamo assumere che sia in quiete rispetto alla lastra e dunque avrà la velocità della lastra v , lo

strato inferiore sarà invece in quiete con il fondo della piscina e dunque avrà velocità 0, quelli intermedi avranno velocità che andranno da 0 a v . Quando una schematizzazione di questo tipo è applicabile al nostro sistema, si dice che il moto del liquido si svolge in **regime laminare**. In tale regime è comunque possibile pensare al moto del fluido come ad un moto di strati che scorrono gli uni sugli altri. Per quanto detto, tale regime, pur non essendo “ideale” nel senso che abbiamo detto sopra, rappresenta comunque un regime di moto essenzialmente ordinato. Nel seguito vedremo cosa succede quando le caratteristiche del moto sono tali che nemmeno questa forma di ordine è consentita.

Empiricamente si osserva una relazione di proporzionalità tra la forza con cui viene spinta la barca e la velocità costante da questa assunta

$$v \propto \frac{Fh}{S} \quad (5.17)$$

tipica di un moto caratterizzato da attrito viscoso (vedi cap.3.2). Sempre con riferimento al modello degli strati di liquido prima illustrato, detta x la coordinata che individua ciascuno strato ($0 < x < h$) ci aspettiamo un andamento lineare della velocità degli strati con la profondità a cui si trovano:

$$v(x) = v \frac{x}{h} \quad (5.18)$$

ovvero

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{h} \quad (5.19)$$

per cui utilizzando la (5.17) espressa per una forza infinitesima dF_t (utilizziamo qui il suffisso t per indicare il carattere tangenziale della forza) e introducendovi la (5.19) otteniamo

$$dF_t = \eta \frac{dv}{dx} dS \quad (5.20)$$

$$T = \frac{dF_f}{dS} = \eta \frac{dv}{dx}$$

in cui dunque lo sforzo di taglio T che caratterizza il moto reale del liquido è espresso in funzione di due elementi: un elemento cinematico (la derivata della velocità rispetto a x) e uno (η) che dipende unicamente dalle caratteristiche della lastra e del mezzo. La quantità η è detta **coefficiente di viscosità**. Dalla (5) si capisce il significato di η : per alti valori di η occorre applicare forze molto elevate per ottenere un’alta velocità della lastra; viceversa valori tendenti a 0 di η corrispondono a liquidi quasi ideali, per i quali non è affatto necessaria l’applicazione di una forza. In **Tab.5.1** vengono dati valori di η per alcuni liquidi comuni. L’unità di misura del coefficiente di viscosità nel S.I. è pari a Ns/m^2 ed è anche detto **Poise**. I valori sono dati per specifici valori della temperatura dei fluidi, dato che il meccanismo della viscosità dipende dalla temperatura.

Materiale	Temperatura (oC)	Viscosità (Ns/m ²)
Acqua	0	1.8×10 ⁻³
	20	1.0×10 ⁻³
	100	0.3×10 ⁻³
Mercurio	20	1.5×10 ⁻³
Olio lubrificante	16	1.1×10 ⁻¹
Etanolo	20	1.2×10 ⁻³
Etere Etilico	20	0.2×10 ⁻³
Sangue	37	4.0×10 ⁻³

Tab.5.1 Valori dei coefficienti di viscosità per alcuni fluidi a diverse temperature.

5.4 Liquido reale in un condotto cilindrico: la legge di Hagen-Poiseuille.

Applichiamo ora le considerazioni appena fatta a proposito dei liquidi reali in moto in regime laminare, al caso di un condotto orizzontale cilindrico nel quale fluisce un liquido.

Nel caso di un condotto cilindrico di lunghezza Δl e raggio della sezione R , il modello degli strati che scorrono gli uni sugli altri continua a valere, con l'importante differenza che in questo caso dobbiamo considerare delle corone cilindriche in luogo dei piani. Lo strato a contatto con la parete del condotto sarà fermo ($v=0$), quelli concentrici avranno invece velocità crescenti fino al cilindro infinitesimo centrale che esibirà la velocità massima ($v=v_{max}$). Chiamiamo r la coordinata radiale, con $r=0$ al centro del condotto e $r=R$ sulla parete; $v(r)$ è la velocità longitudinale del moto laminare dello strato che si trova a distanza r dal centro del condotto, si tratta di una funzione chiaramente decrescente; p e p' sono rispettivamente le pressioni del liquido all'inizio e alla fine del condotto.

Consideriamo dunque il moto del generico strato, corona cilindrica lunga Δl compresa tra i raggi r e $r+dr$. Essendo il moto a velocità costante, la somma delle forze agenti sullo strato deve annullarsi. Le forze in questione sono 2: la forza di pressione che agisce sulle due estremità dello strato, e gli sforzi di taglio dovuti agli strati inferiore e superiore. Le risultante delle forze di pressione sarà data da:

$$(p - p')2\pi r dr \quad (5.21)$$

mentre la risultante delle forze di taglio sarà data dal bilanciamento tra la forza esercitata dallo strato esterno e quella esercitata sullo strato interno:

$$-2\pi r \Delta l \eta \frac{dv}{dr} + 2\pi(r + dr) \Delta l \eta \left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr \right) \quad (5.22)$$

in cui abbiamo usato l'espressione (5.20) per caratterizzare lo sforzo di taglio nell'una e nell'altra superficie di separazione. Si noti che essendo la derivata dv/dr negativa, il primo termine della somma, dovuto al trascinamento dello strato più interno risulta positivo, il secondo, dovuto al trascinamento dello strato più esterno risulta invece negativo.

Sommiamo ora e uguagliamo a 0 la somma delle espressioni (5.21) e (5.22) eliminando il fattore comune $2\pi dr$ ed trascurando i termini di second'ordine:

$$(p - p')r + \Delta l \eta \frac{dv}{dr} + r \Delta l \eta \frac{d^2v}{dr^2} = 0$$

$$-\Delta p = \frac{\Delta l \eta}{r} \left[\frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} \right] = \frac{\Delta l \eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$
(5.23)

Siamo pervenuti ad una equazione differenziale del secondo ordine in r da cui, integrando due volte ricaviamo la funzione $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Procediamo con due integrazioni entrambi per separazione di variabili. La prima:

$$-\Delta p \int_0^r r' dr' = \eta \Delta l \int_0^r \frac{d}{dr'} \left(r' \frac{dv}{dr'} \right)$$

$$-\Delta p \frac{r^2}{2} = \eta \Delta l r \frac{dv}{dr}$$
(5.24)

e la seconda:

$$-\Delta p \frac{r dr}{2} = \eta \Delta l dv$$

$$-\frac{\Delta p}{2 \eta \Delta l} \int_R^r r' dr' = \int_0^{v(r)} dv'$$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4 \eta \Delta l} (R^2 - r^2)$$
(5.25)

Quest'ultima equazione esprime la dipendenza della velocità dello strato infinitesimo dalla sua posizione del condotto, ed è illustrata in modo qualitativo in **Fig.5.4**. A differenza del caso del moto della lastra discusso nel precedente paragrafo, la velocità varia in questo caso quadraticamente con il raggio, e raggiunge il suo valore massimo \mathbf{v}_{max} , per $\mathbf{r}=0$:

$$v_{max} = \frac{\Delta p}{4 \eta \Delta l} R^2$$
(5.26)

A partire dall'ultima delle (5.25), con una ulteriore integrazione sulla generica sezione S , determiniamo la portata volumetrica del condotto:

$$Q_v = \int_S v dS' = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{2\pi \Delta p}{4 \eta \Delta l} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$= \frac{2\pi \Delta p}{4 \eta \Delta l} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{2\pi \Delta p}{4 \eta \Delta l} R^4$$
(5.27)

da cui otteniamo la legge di Hagen-Poiseuille che esprime la portata di un condotto cilindrico dove scorre un liquido in regime laminare:

$$Q_v = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta \Delta l} R^4$$
(5.28)

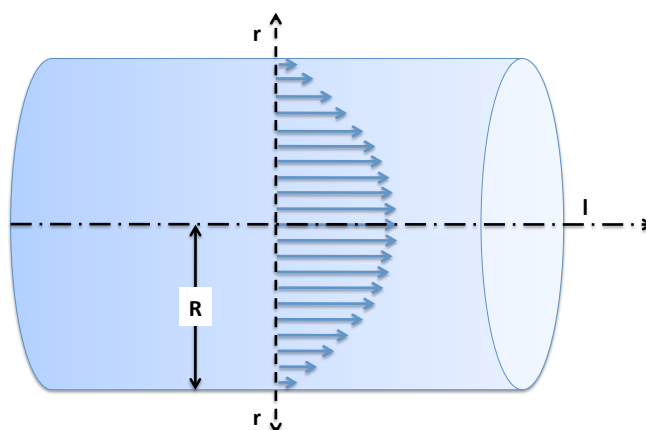


Fig.5.4 Andamento delle velocità delle corone circolari elementari di fluido in funzione del raggio r della corona. L'andamento è illustrato per il moto di un fluido in un condotto cilindrico.

Facciamo ora alcune considerazioni su questa importante formula. Essa esprime una relazione di proporzionalità tra la cosiddetta **caduta di pressione** tra le due estremità del condotto Δp e la portata del condotto stesso Q_v

$$\Delta p = Z Q_v$$

in cui il coefficiente di proporzionalità Z è dato da:

$$Z = \frac{8\eta\Delta l}{\pi R^4} \quad (5.29)$$

ed è anche detto **impedenza** del condotto. Il significato dell'impedenza è analogo a quello della resistenza elettrica nella teoria dei circuiti: più elevata è l'impedenza, minore è la portata (analogo della corrente elettrica) che si riesce ad avere per una data caduta di pressione (analogo della differenza di potenziale). L'impedenza dipende dal coefficiente di viscosità del liquido e dalla geometria del condotto. Si noti la dipendenza dalla quarta potenza del raggio del condotto, che mostra come condotti molto sottili (come i capillari) abbiano in generale delle impedenze molto elevate.

5.5 Moto laminare e moto turbolento: il numero di Reynolds.

Le considerazioni fatte nei due paragrafi precedenti fino alla derivazione della legge di Hagen-Poiseuille si applicano al caso del moto in regime laminare, un caso in cui, come abbiamo detto, benché il liquido non sia ideale, il suo moto è tuttavia caratterizzato da un certo grado di "ordine". Il fenomeno della viscosità può essere visto come il meccanismo in grado di mantenere "ordinato" questo moto, garantendo un regolare scorrimento tra i volumi del liquido in moto relativo gli uni rispetto agli altri. Tuttavia per un dato liquido, ci aspettiamo che al crescere della velocità, si arrivi ad una situazione nella quale la forza di attrito viscoso tra i due strati non è più sufficiente a contrastare la tendenza dei singoli volumi di fluido a muoversi liberamente in modo disordinato. Per un certo valore di velocità critica si passa dal regime laminare ad un altro che chiameremo **regime vorticoso** o **turbolento**, nel quale dunque un elemento di liquido darà luogo ad un moto vario all'interno del condotto, non più caratterizzabile come stazionario. E' possibile mettere in evidenza sperimentalmente il passaggio dal

moto laminare a quello turbolento iniettando nel condotto filamenti di liquidi colorati e osservando che in un caso un filamento colorato mantiene la sua identità nel corso del moto, mentre nell'altro caso tenderà a frammentarsi.

La trattazione del moto turbolento è chiaramente molto complessa e viene generalmente fatta utilizzando programmi di simulazione al computer. Qui vogliamo solo individuare delle grandezze accessibili sperimentalmente che permettono di caratterizzare il passaggio da un tipo di moto all'altro. A tale scopo introduciamo il **numero di Reynolds**:

$$R_e = \frac{\rho v R}{\eta} \quad (5.30)$$

combinazione adimensionale di alcune caratteristiche del tipo di liquido (la densità ρ e il coefficiente di viscosità η) del raggio del condotto R e della velocità v . Qualitativamente possiamo pensare R_e come il rapporto tra le "forze di inerzia" dovute alla velocità e le forze di attrito viscoso. Valori elevati di R_e corrispondono a situazioni nelle quali la velocità tende a dominare sulla resistenza dovuta alla viscosità. Empiricamente si osserva che per $R_e > 1000$ si ha la transizione dal moto laminare al moto turbolento. Ciò è equivalente a stabilire un valore della velocità critica pari a:

$$v_{cr} \approx 1000 \frac{\eta}{\rho R} \quad (5.31)$$

Si tratta di una relazione semiquantitativa, più una stima di ordine di grandezza che un valore effettivo in cui cambia il regime. Tuttavia è interessante notare il fatto che la velocità critica è tanto più grande quanto più alta è la viscosità e quanto più piccola è la densità, per cui liquidi leggeri e molto viscosi sono più adatti al moto laminare.

Nel caso di moto turbolento cambia anche la relazione tra caduta di pressione e portata. Tendenzialmente non si ha più una relazione lineare tra le due ma piuttosto una relazione quadratica tra caduta di pressione e velocità. Su base puramente empirica si trova:

$$\Delta p = \frac{\lambda \Delta l}{2R} v^2 \quad (5.32)$$

in cui λ è un parametro avente le dimensioni di una densità, legato al numero di Reynolds dalla:

$$\lambda = 0.16 \rho R_e^{-1/4} \quad (5.33)$$

La relazione (5.32) ci dice che in questo caso, per raddoppiare la velocità del moto occorre quadruplicare la caduta di pressione e non raddoppiarla come nel caso del regime laminare. Dal punto di vista dunque della conduzione il moto laminare è decisamente preferibile a quello turbolento.

5.6 Legge di svuotamento di un capillare nel regime laminare e nel regime turbolento.

Abbiamo a questo punto tutti gli strumenti per trattare il caso dello svuotamento del condotto attraverso un capillare, schematizzato nella figura 5.1. Deriveremo la legge di svuotamento nelle seguenti ipotesi: il moto lungo il condotto verticale può essere considerato ideale e quindi segue il teorema di Bernoulli; il moto nel capillare sarà considerato prima laminare poi turbolento: nel primo caso

utilizzeremo la (5.28), nel secondo caso la (5.32). Infine faremo delle considerazioni di carattere sperimentale.

Applichiamo dunque il teorema di Bernoulli nella forma (5.11) tra il pelo dell'acqua (quota h , sezione S , pressione atmosferica p , velocità v) nel condotto verticale e il punto di fuoriuscita del liquido dal condotto al capillare (quota 0, sezione S' , pressione p' e velocità v'):

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = \frac{v'^2}{2g} + \frac{p'}{\rho g} \quad (5.34)$$

$$\rho g h = (p' - p) + \frac{1}{2} \rho (v'^2 - v^2) = (p' - p) + \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\left(\frac{v'}{v} \right)^2 - 1 \right)$$

Osserviamo subito che il rapporto v'/v è pari al rapporto tra la sezione del condotto verticale e quella del capillare, e dunque, dato che nei casi che ci interessano

$$\frac{v'}{v} = \frac{S}{S'} \gg 1 \quad (5.35)$$

possiamo semplificare la (5.34) e ottenere la relazione tra quota h e velocità v :

$$h = \frac{p' - p}{\rho g} + \frac{1}{2g} v^2 \left(\frac{S}{S'} \right)^2 \quad (5.36)$$

Nella (5.36) compare la caduta di pressione $p' - p$ che, come sappiamo è legata alla velocità in modi diversi a seconda se ci troviamo nel regime laminare o turbolento. Una volta specificata tale relazione la (5.36) dà luogo ad una equazione differenziale in h , essendo infatti $v = dh/dt$. Ricaviamo tale equazione nei due casi.

Nel caso del moto laminare usiamo la (5.28). Detto r' il raggio del capillare, v' la velocità media nel capillare, e osservato che la caduta di pressione tra gli estremi del capillare è pari a $p - p'$ (uguale e opposta a quella ai capi del condotto verticale, dato che la pressione in uscita dal capillare non può che essere quella atmosferica), si ha:

$$Q_v = \pi r'^2 v' = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta \Delta l} r'^4 \quad (5.37)$$

$$\Delta p = \frac{8 \eta \Delta l v'}{r'^2} = \frac{8 \eta \Delta l v}{r'^2} \left(\frac{S}{S'} \right)$$

Sostituendo nella (5.36) otteniamo l'equazione differenziale cercata:

$$h = \frac{8 \eta \Delta l}{\rho g r'^2} \left(\frac{S}{S'} \right) \frac{dh}{dt} + \frac{1}{2g} \left(\frac{S}{S'} \right)^2 \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \quad (5.38)$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare, né riconducibile banalmente ad una equazione lineare. Tuttavia vediamo facilmente che nel caso di moto laminare, finché cioè il numero di Reynolds rimane al di sotto del valore di soglia che abbiamo stabilito essere dell'ordine di 1000, il secondo termine della (5.28) è trascurabile rispetto al primo. Infatti facendo il rapporto tra i due termini e procedendo alle numerose semplificazioni si ottiene:

$$\frac{S}{S'} \frac{\rho r'^2 v}{16 \eta \Delta l} = \frac{\rho r'^2 v'}{16 \eta \Delta l} = \frac{r'}{16 \Delta l} R_e \ll 1 \quad (5.39)$$

se

$$R_e \ll \frac{16 \Delta l}{r'} \approx 1000 \quad (5.40)$$

condizione verificata nel caso di moto laminare, dati i valori di Δl e r' dei capillari in uso in laboratorio. Dunque nella (5.38) possiamo togliere il secondo addendo a secondo membro e ricavare l'equazione lineare del primo ordine che, definita la costante di tempo τ

$$\tau = \frac{8\eta\Delta l r^2}{\rho g r'^4} \quad (5.41)$$

è del tipo ben noto:

$$\frac{dh}{h} = -\frac{dt}{\tau} \quad (5.42)$$

e fornisce dunque soluzioni di tipo esponenziale per la legge di svuotamento del condotto attraverso un capillare in regime laminare:

$$h(t) = h_0 e^{-t/\tau} \quad (5.43)$$

La velocità dello svuotamento è parametrizzata dalla costante τ e dunque, come atteso, dipende dal tipo di liquido (ρ , η) e dalle caratteristiche geometriche di provetta e capillare (Δl , r , r') oltre che dall'accelerazione di gravità, essendo la gravità in definitiva il motore dello svuotamento.

Nel caso di regime turbolento, sostituiamo la relazione (5.32) nella (5.36):

$$h = \frac{v'^2 \Delta l \lambda}{2\rho g r'} + \frac{v'^2}{2g} \left(\frac{S}{S'}\right)^2 = v'^2 \left(\frac{S}{S'}\right)^2 \left(\frac{\lambda \Delta l}{2\rho g r'} + \frac{1}{2g}\right) = \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{\lambda \Delta l}{\rho r'}\right) v'^2 \left(\frac{S}{S'}\right)^2 \quad (5.44)$$

In questo caso si ha un'equazione del tipo

$$h = \frac{1}{k^2} \left(-\frac{dh}{dt}\right)^2 \quad (5.45)$$

in cui abbiamo definito la costante k data da:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{\lambda \Delta l}{\rho r'}\right) \left(\frac{S}{S'}\right)^2 \quad (5.46)$$

Si noti che a rigore k non è una costante, dato che contiene al suo interno il parametro fenomenologico λ definito dalla (5.33) che a sua volta, dipendendo da Re , può variare nel corso del fenomeno. Data tuttavia la debole dipendenza (alla -1/4) di λ dalla velocità, assumiamo k costante nel corso del moto. L'equazione (5.45) è ancora di tipo non lineare. Tuttavia in questo caso prendendo la radice di ambo i membri ci si riconduce ad una equazione lineare che risolviamo con il metodo della separazione delle variabili:

$$\begin{aligned} \sqrt{h} &= \frac{1}{k} \left(-\frac{dh}{dt}\right) \\ \int_{h_0}^h \frac{dh'}{\sqrt{h'}} &= -\int_0^t k dt' \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$2\sqrt{h} \Big|_{h_0}^h = -kt$$

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0} - \frac{k}{2} t$$

Come si vede dalla (5.46), la costante k dipende dalle stesse quantità da cui dipende la costante di tempo τ definita per il moto laminare, ed è dunque la grandezza che controlla la velocità di svuotamento.

Ricapitolando, le leggi di svuotamento cercate sono dunque:

→ nel caso di regime laminare la legge (5.43) con la definizione della costante di tempo τ (5.41);

→ nel caso di regime vorticoso, l'ultima delle (5.47) con la definizione di costante k data dalla (5.46).

La Fig.5.5 mostra due esempi di leggi di svuotamento per un set di parametri.

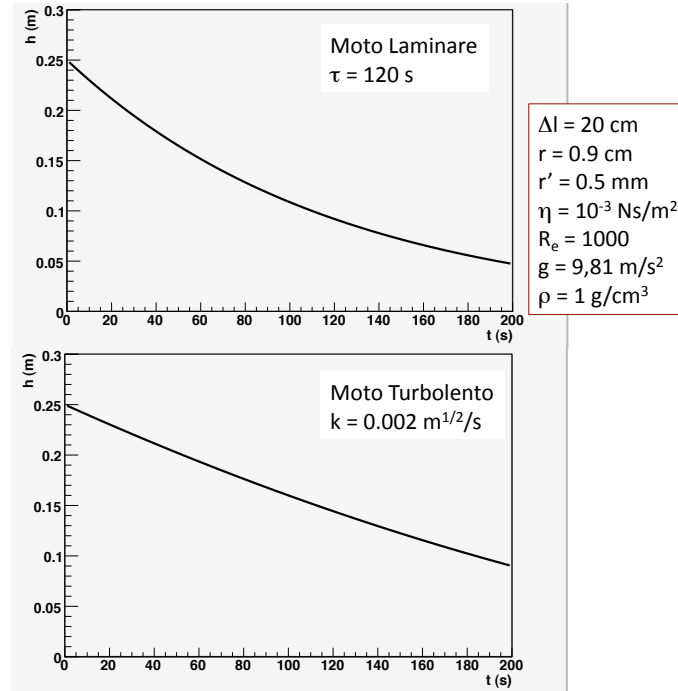


Fig.5.5 Andamento del livello del liquido nella provetta in funzione del tempo per un caso di moto laminare ed uno di moto turbolento. Sono indicati i valori dei parametri usati e quelli delle costanti di tempo τ e k rispettivamente nei due casi.

5.7 Considerazioni sperimentali.

Per ognuno dei capillari a disposizione si procederà in laboratorio alla misura della funzione $m(t)$ definita sopra. E' facile rendersi conto che tale funzione è direttamente collegata alla funzione $h(t)$ ricavata nel paragrafo precedente per ciascuno dei due regimi possibili. Infatti al generico istante di tempo t , la quantità di liquido finita nella bilancia sarà pari a quella mancante nel condotto verticale (trascurando il volume del capillare):

$$m(t) = (h_0 - h(t))S\rho \quad (5.48)$$

ovvero, introducendo la quantità

$$m_\infty = h_0 S \rho$$

pari alla massa totale trasferita dal condotto alla bilancia a fine esperimento,

$$h(t) = \frac{1}{S\rho} (m_\infty - m(t)) \quad (5.49)$$

che è la relazione da usare per ricavare la quantità $h(t)$ da confrontare con la teoria. Dunque occorrerà conoscere S e ρ (quest'ultima è la densità dell'acqua) e si dovrà misurare direttamente con la bilancia la massa in funzione del tempo.

Concludiamo osservando che derivando la (28) rispetto al tempo si ottiene una relazione molto interessante:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dh}{dt} \rho S = v(t) \rho S = v'(t) \rho S' = v'(t) \rho \pi r'^2 \quad (5.50)$$

Dalla misura della derivata della quantità misurata dalla bilancia $m(t)$ si può ottenere la velocità di fuoriuscita dal capillare in funzione del tempo

$$v'(t) = \frac{1}{\pi \rho r'^2} \frac{dm}{dt} \quad (5.51)$$

e da questo, noto il coefficiente di viscosità, il numero di Reynolds in ogni istante dello svuotamento:

$$R_e(t) = \frac{1}{\pi \eta r'} \frac{dm}{dt} \quad (5.52)$$

Dunque la misura diretta di dm/dt consente di valutare direttamente il regime del moto di svuotamento istante per istante.

