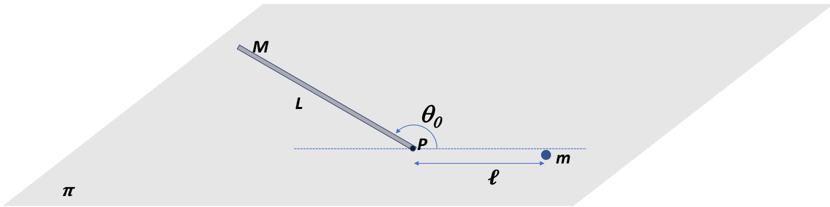
Corso Meccanica – Anno Accademico 2017/18 – Secondo compito d'esonero - 11/06/2018

Esercizio n. 1

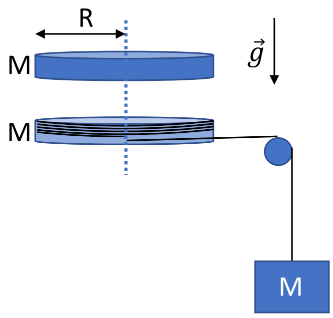
Una sbarretta di massa M e lunghezza L è vincolata a ruotare intorno ad un perno P posto in uno dei due estremi di essa, senza attrito e sul piano orizzontale π. La sbarretta si comporta come un pendolo di torsione, è soggetta cioè ad un momento di richiamo $k\theta(t)$, dove k è la costante elastica e $\theta(t)$ è l'angolo rispetto alla posizione di equilibrio della sbarretta.
La sbarretta viene caricata, portandola alla posizione iniziale di $\theta_0 = 150°$. Quindi viene lasciata libera di ruotare. Quando la sbarretta giunge alla posizione $\theta = 0°$, essa colpisce con un urto elastico una massa puntiforme di massa m, ferma, posta ad una distanza ℓ dal perno. Calcolare:

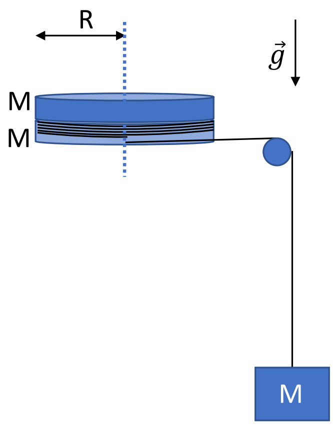


1. La velocità angolare della sbarretta immediatamente prima dell'urto
2. La velocità angolare della sbarretta e la velocità della massa m dopo l'urto
3. L'impulso trasmesso dal perno alla sbarretta durante l'urto
4. L'ampiezza delle oscillazioni della sbarretta successive all'urto.

[$\boldsymbol{m}$=2.0kg; $\boldsymbol{M}$=1.0kg; $\boldsymbol{k}=10^3$ Nm; $\boldsymbol{L}$=30cm; $\boldsymbol{\ell}$=20cm]

Esercizio n. 2





Un disco omogeneo di massa M e raggio R è disposto in orizzontale e può ruotare senza attrito intorno ad un asse passante per il suo centro di massa. Un filo inestensibile e di massa trascurabile è avvolto intorno al disco e tramite una carrucola è collegato ad un corpo, anche esso di massa M, che può scendere sotto l'azione del suo peso. Durante il moto il filo non striscia sulla superficie del disco. Al tempo t=0 la massa M comincia a scendere.
Al tempo $t=t_1$ un secondo disco identico al precedente ad esso coassiale ed inizialmente fermo è accostato a questo in modo che tra i due si sviluppi una forza di attrito di momento costante τ. Al tempo $t=t_2$ i due dischi ruotano con la stessa velocità angolare.
Si determini:

1) L'accelerazione della massa M per $t<t_1$.
2) La velocità angolare del primo disco al tempo t_1
3) Di quanto è sceso il peso M al tempo t_1
4) Il modulo del momento τ delle forze di attrito tra i due dischi, affinché nell'intervallo di tempo tra t_1 e t_2 il primo disco ruoti a velocità angolare costante.
5) Nelle condizioni indicate nella domanda 4 calcolare il tempo t_2 a partire dal quale i due dischi ruotano con la stessa velocità angolare.

[$\boldsymbol{M}$=2.5 kg, $\boldsymbol{R}$=48 cm, $\boldsymbol{t_1}$=1.5 s]

Corso Meccanica – Anno Accademico 2017/18 – Secondo compito d'esonero - 11/06/2018

Soluzione n. 1

Per le condizioni descritte dal problema, prendendo il polo P per il calcolo dei momenti, la sbarretta dal momento in cui è lasciata libera di muoversi fino a quando urta la massa m, è soggetta al solo momento torcente pari a $k\theta(t)$. Applicando la seconda equazione cardinale della meccanica $\quad k\theta(t) = -I_p\dot{\omega}(t) = -I_p\ddot{\theta}(t) \quad$ dove $I_P = \frac{1}{3}ML^2$

Il moto della sbarretta quindi, caratterizzato da $\quad \ddot{\theta}(t) + \frac{k}{I_P}\theta(t) = 0 \quad$ è un moto armonico che segue la legge

$\theta(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$ dove, per le condizioni date, A=150°=$\frac{5}{6}\pi$, $\varphi = 0$ ed $\Omega = \sqrt{\frac{k}{I_P}}$.

1) La sbarretta arriva nella condizione $\quad \theta(t) = 0 \quad$ dopo un quarto di periodo $t_{urto} = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{I_P}{k}}$ con una velocità angolare pari, in modulo, a
$\omega(t_{urto}) = \dot{\theta}(t_{urto})$=-$\frac{5}{6}\pi\ \Omega\ sin\frac{\pi}{2}$=-$\frac{5}{6}\pi\ \Omega$= 478 rad/s

2) L'urto è elastico, si conservano l'energia cinetica ed il momento della quantità di moto rispetto al polo P :
$I_P\omega(t_{urto}) = I_P\omega' + \ell m v'$
$\frac{1}{2}I_P\omega^2(t_{urto})$=$\frac{1}{2}I_P\omega^{2\prime} + \frac{1}{2}mv'^2$
dove ω' e v' sono, rispettivamente, la velocità angolare della sbarra e la velocità lineare della massa subito dopo l'urto. Da tali relazioni si ricava
$v' = \frac{I_P\,[\omega(t_{urto}) - \omega']}{\ell m}$ e $\omega'_{1,2} = \frac{\omega(t_{urto})\,I_P \pm \sqrt{\omega^2(t_{urto})I_P^2 - (I_P + m\ell^2)\omega^2(t_{urto})(I_P^2 - m\ell^2)}}{(I_P + m\ell^2)}$
Numericamente: ω'_1=217.3 rad/s (rotazione in senso antiorario) e v'=52.1 m/s
oppure ω'_1=478 rad/s (rotazione in senso orario) e v'=0 m/s (non c'e' urto !).
Scegliamo la prima soluzione come reale.

3) L'impulso ceduto dal vincolo al sistema sbarretta + massa nell'istante dell'urto è pari alla variazione della quantità di moto del sistema. Nel nostro caso siccome $\ell = \frac{2}{3}L$ è facile dimostrare che la conservazione del momento della quantità di moto comporta anche la conservazione della quantità di moto:
$I_P\omega(t_{urto}) = \frac{1}{3}ML^2\omega(t_{urto}) = \frac{2}{3}L\,M\frac{L}{2}\omega(t_{urto}) = \frac{2}{3}L\,M\frac{L}{2}\omega' + \ell m v'$ e quindi dividendo per $\ell\frac{2}{3}L$ a destra ed a sinistra dell'equazione otteniamo
$M\frac{L}{2}\omega(t_{urto}) = M\frac{L}{2}\omega' + mv'$ che esprime la conservazione della quantità di moto. Il vincolo non fornisce alcun impulso durante l'urto.

4) In seguito all'urto la legge del moto della sbarretta sarà caratterizzata dalla stessa pulsazione $\Omega = \sqrt{\frac{k}{I_P}}$ calcolata in precedenza. Pertanto essendo $\omega' = A'\Omega$ possiamo calcolare $A' = \frac{\omega'}{\Omega}$=1,19 rad=68.2 gradi

Soluzione n. 2

(1) Fino al tempo t_1 le equazioni del moto della massa m e del cilindro 1 sono:

$Ma=Mg-T$

$I\alpha_1=TR$

con la relazione

$R\alpha_1=a$

Dalle due equazioni si ottiene l'accelerazione angolare α:

$I\alpha_1=MgR-M\alpha R^2$

$\alpha_1=MgR/(I+MR^2)=2g/3R$

Pertanto $a=2g/3 = 6.5\ m/s^2$

(2) Da ciò deriviamo anche la velocità angolare:

$\omega_1(t)= \alpha_1 t$

per cui

$\omega_1(t_1)= \alpha_1 t_1=2gt_1/(3R)= 20.4\ rad/s$

(3) Il peso M scende con un moto uniformemente accelerato di accelerazione

$a= \alpha_1 R=2g/3$

da cui

$h=1/2at_1^2=g\ t_1^2/3=7.3\ m$

(4) Nella seconda fase del moto le equazioni del moto della massa e dei due dischi sono:

$Ma=Mg-T$

$I\alpha_1=RT-\tau$

$I\alpha_2=\tau$

L'accelerazione angolare del disco 1 sarà data da

$\alpha_1=(MgR-\tau)/(I+MR^2)= 2(MgR-\tau)/(3R^2M)$

Mentre quella del disco 2 sarà data da:

$\alpha_2=\tau/I = 2\tau/MR^2$

La condizione per cui il disco 1 si muove a velocità angolare costante è ottenuta per

$\tau = MgR = 11.8\ Nm$

(5) Per calcolare t_2 devo vedere a che tempo il disco 2 raggiunge la velocità angolare dell'1

$\omega_2(t_2)=\alpha_2(t_2-t_1)= \omega_1(t_1)$

$t_2-t_1= \omega_1(t_1)/ \alpha_2=t_1/3$

da cui

$t_2=t_1+t_1/3 = 4t_1/3=2s$