Legge di svuotamento di un tubo attraverso dei capillari

L'apparecchiatura a disposizione consiste di un tubo verticale T e di diversi capillari T' aventi sezioni e lunghezze diverse, ciascuno dei quali puo' essere inserito tramite un tappo di gomma in prossimità dell'apertura inferiore del tubo T in direzione orizzontale (vedi Fig.1). Si assuma che (S/S')>> 1, dove S (S') e' la sezione del tubo (del capillare). Questo implica che il moto del liquido in T e' laminare.
Riempito T di un liquido questo defluisce attraverso T'. Il regime di moto del liquido in T (ovvero il regime di svuotamento) dipende dalle dimensioni di T' e dal livello h del liquido in T. Lo scopo dell'esperienza e' di studiare i due regimi, turbolento e laminare, e possibilmente la regione di transizione tra i due.

Ricordiamo che in regime laminare vale la legge di Poiseuille (vedi paragrafi precedenti) per la caduta di carico:

$$\Delta p = 8\eta \frac{v' l}{r'^2}, \quad (1)$$

dove v' e' la velocità di deflusso in T', l la lunghezza del capillare il cui raggio e' r' ed η è la viscosità del fluido.

In regime turbolento (vedi discussione a proposito del numero di Reynolds) si ha per la stessa quantità:

$$\Delta p = \frac{v'^2 l}{2r'}\lambda, \quad (2)$$

dove $\lambda = 0.16\, \rho\, R_l^{-1/4}$ e' un parametro sperimentale (che ha dimensioni pari ad una densità) ed R_l e' il numero di Reynolds.

Se vale la condizione (S/S')>> 1, in T si puo' applicare il teorema di Bernoulli ricavando la differenza p-p'=Δp (p e' la pressione esterna al fluido). Si ha allora:

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = p' + \rho g h' + \frac{1}{2}\rho v'^2 \qquad (3)$$

ponendo h'=0 (l'altezza del capillare e' posta uguale a zero) si ottiene:

$$\rho g h = p' - p + \frac{1}{2}\rho (v'^2 - v^2) \qquad (4)$$

Applicando il teorema di continuità (vS=v'S') si ottiene:

$$\rho g h = p' - p + \frac{1}{2}\rho v^2 \left[\left(\frac{S}{S'}\right)^2 - 1 \right] \qquad (5)$$

Trascurando 1 rispetto al rapporto fra le aree (nel caso pratico si ha almeno S/S'~10) abbiamo finalmente:

$$\rho g h = p' - p + \frac{1}{2}\rho v^2 \left[(\frac{S}{S'})^2 \right] \qquad (6)$$

Regime turbolento in T'

In questo caso usando la (2) per la caduta di carico abbiamo infine:

$$\rho g h = \frac{v'^2}{2r'} l\lambda + \frac{1}{2}\rho v^2 \left[(\frac{S}{S'})^2 \right] = \frac{l\lambda}{d'} (S/S')^2 v^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \left[(\frac{S}{S'})^2 \right]$$

$$h = \frac{1}{2g} v^2 (\frac{S}{S'})^2 (1 + \frac{2l\lambda}{d'\rho}) \qquad (7)$$

Se definiamo $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2g}(1 + \frac{2l\lambda}{d'\rho})$ otteniamo $h = \frac{1}{k^2} v^2 (\frac{S}{S'})^2$. Poiche' si ha $v = -\frac{dh}{dt} = k(S'/S)\sqrt{h}$ (8) ed integrandola tra h_0 e h(t) (t_0 e t) e ponendo t_0=0 si ha infine la legge di svuotamento in regime turbolento:

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0} - \frac{k}{2}(S'/S)t \qquad (8)$$

Poiché k e' funzione di l e d', la (8) dipende dalle condizioni geometriche del capillare. Da una misura di k=k(l) è quindi possibile determinare sperimentalmente il parametro dimensionale λ.

Regime laminare in T'

Usando la (1) e la (6) si puo' scrivere:

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 (\frac{S}{S'})^2 + 32\eta \frac{l}{d'^2} (\frac{S}{S'}) v \qquad (9)$$

Ora il rapporto tra il I ed il II membro della precedente espressione si puo' scrivere come:

$$\frac{\frac{1}{2}\rho v^2 (\frac{S}{S'})^2}{32\eta \frac{l}{d'^2}(\frac{S}{S'})v} = \frac{1}{64}\frac{\rho v(\frac{S}{S'})}{\eta \frac{l}{d'^2}} \qquad (10)$$

Il numero di Reynolds in T' è definito come:

$R_l = \frac{v' d' \rho}{\eta}$ che sostituito nel secondo membro della (10) da $\frac{1}{64}\frac{d'}{l}R_l$, per cui tale rapporto diventa tanto più piccolo tanto è più piccolo il numero di Reynolds. Tale rapporto inoltre, tenendo le altre variabili costanti, decresce al crescere di l. Se il I termine nella (9) (quello in v^2) puo' essere trascurato si ha infine:

$\rho g h = 32\eta \frac{l}{d'^2}(\frac{S}{S'})v$ che integrata (seguendo la stessa procedura che ha portato alla (8)), da:

$$h(t) = h_0 e^{-t/\tau} \qquad (11)$$

dove la costante di tempo $\tau = \frac{32\eta l}{\rho g d'^2}(S/S')$.

Esperimento

Nel nostro caso la misura di altezza viene tradotta in una misura di massa attraverso una bilancia interfacciata ad un computer. Quando il tubo T è pieno (altezza $h(t=0)=h_0$) la massa misurata dalla bilancia vale 0, a tubo svuotato $h(t\to\infty)=h_\infty$, la massa e' quella massima.
Poiché T è a sezione costante (S), la massa totale del fluido contenuta vale:

$$m = \rho V = \rho(h_0 - h(t))S \qquad (12)$$

dove V e' il volume di liquido.

Infatti $m(t=0)=0$ poiché $h(t=0)=h_0$, mentre $m(t\to\infty)=\rho\, h_0 S$.

Dalla (12) si ha $\frac{m_\infty - m(t)}{\rho S} = h(t)$ e quindi tra la quantità misurata m(t) e h(t) la relazione e' lineare.

Le due espressioni di h(t) ricavate per il regime turbolento (8) e regime lineare (11) diventano in termini della nuova variabile m(t) diventano:

$$\sqrt{\frac{m_\infty - m(t)}{\rho S}} = \sqrt{\frac{m_\infty}{\rho S}} - \frac{k}{2}(S'/S)t \qquad (8')$$

La (8’) così come la (8) implica che nel moto turbolento lo svuotamento necessita di un tempo finito. Questo tempo si può calcolare dalla (8) e si ha:

$\sqrt{h(t^*)} = 0$ da cui $\sqrt{h_0} = \frac{k}{2}(S'/S)t^*$ e quindi $t^* = 2(S/S')\frac{\sqrt{h_0}}{k}$

Nel moto laminare si ha invece:

$$m(t) = m_\infty(1 - e^{-t/\tau}) \qquad (11')$$