Compito 3 Febbraio 2016

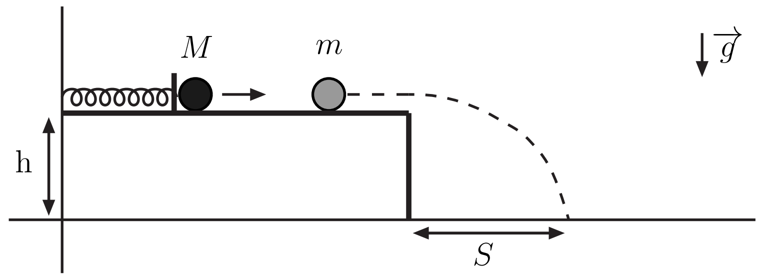
Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale 1 per Matematici
3 Febbraio 2016

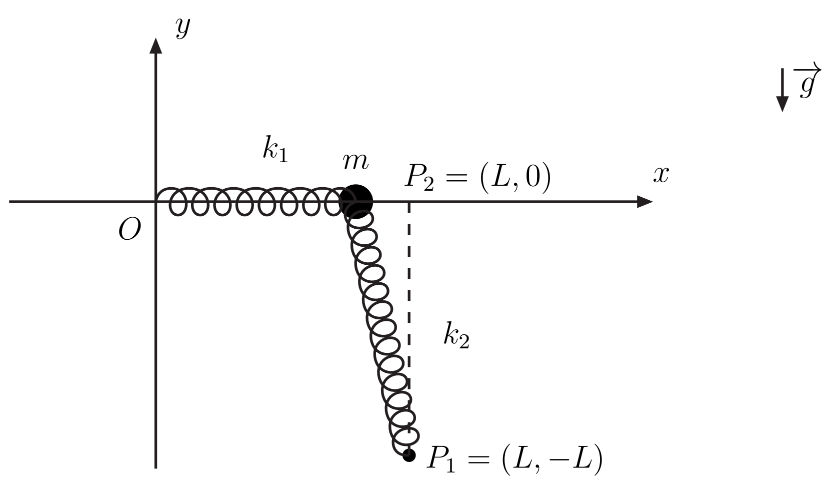
R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1



La massa $M = 1$ kg si trova su un piano orizzontale privo di attrito, rialzato di $h = 2$ m rispetto al suolo. Grazie ad un opportuno sistema di bloccaggio, la massa M è ferma, poggiata ad una molla di costante elastica $k = 100$ N/m, compressa di un tratto $L = 0.2$ m. Quando il blocco viene tolto, M si mette in moto lungo il piano e va ad urtare una seconda massa $m = 0.4$ kg. L'urto è perfettamente anelastico e quindi le due masse formeranno un unico corpo. Determinare la distanza S dal bordo del piano, in cui il corpo toccherà il suolo. *(7 punti, compito completo)*

Esercizio 2



Un punto materiale di massa $m = 0.5$ kg è vincolato a muoversi sull'asse delle x (vedi figura) ed è collegato tramite una molla ideale di costante elastica $k_1 = 20$ N/m e lunghezza di riposo trascurabile al punto O, origine degli assi cartesiani. Un'altra molla ideale, di costante elastica $k_2 = 2k_1 = 40$ N/m e lunghezza di riposo trascurabile, collega m al punto P_1, fisso nel piano verticale xy, di coordinate $(L, -L)$, con $L = 0.5$ m. Dove non diversamente specificato, il vincolo su cui si muove il punto materiale è liscio.

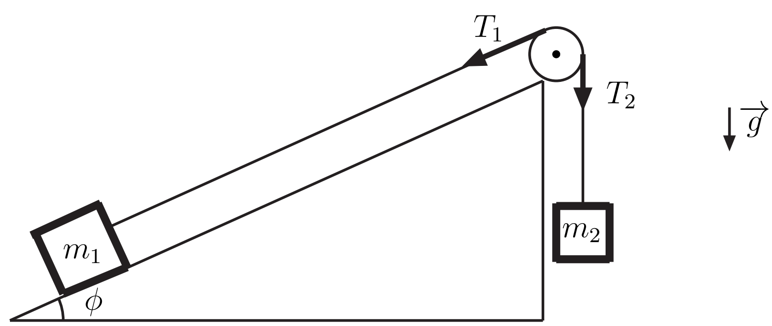
1. Trovare la posizione di equilibrio del punto m soggetto alle due forze elastiche. *(2 punti, compito completo)*

2. Trovare l'equazione del moto e il periodo. *(3 punti, compito completo)*

3. Se fra punto materiale e vincolo c'è attrito statico con coefficiente d'attrito μ_S, trovare il valore minimo di μ_S affinché la posizione P_2 di coordinate $(L, 0)$ (con $L = 0.5$ m) sia di equilibrio. *(3 punti, compito completo)*

****

Esercizio 3



Nel piano in figura, inclinato di un angolo $\phi = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, due blocchi di massa rispettivamente $m_1 = 15$ kg e $m_2 = 20$ kg sono collegati da una fune ideale (inestensibile, di massa nulla) che passa su una carrucola di raggio $R = 10$ cm e momento d'inerzia I. Quando i blocchi vengono lasciati liberi, m_2 scende verso il basso, m_1 sale lungo il piano inclinato e la fune, scorrendo senza strisciare sulla carrucola, la mette in rotazione. Sapendo che m_1 sale lungo il piano inclinato con accelerazione $a = 2$ m/s^2, determinare il momento d'inerzia I della carrucola.
NB. Si mette in evidenza il fatto che, come indicato in figura, le forze T_1 e T_2 sono diverse fra loro. *(7 punti, compito completo)*

Esercizio 4

Un cilindro è posto in verticale in un ambiente in cui la pressione è mantenuta costante al valore P_0. Una mole di gas perfetto monoatomico è contenuta nel cilidro, chiuso da un pistone di massa nulla libero di scorrere senza attrito. Cilindro e pistone sono termicamente isolanti. Inizialmente, il gas è in equilibrio nello stato A, in cui occupa un volume V_A alla temperatura $T_A = 300°$K, in quanto sulla faccia esterna del pistone, su cui agisce la pressione P_0, è poggiata la massa m. Quando la massa m viene tolta, sul pistone agisce solo la pressione P_0. Di conseguenza il gas si espande istantaneamente facendo salire il pistone e, dopo un certo tempo, si porta in un nuovo stato di equilibrio B in cui il volume occupato è $V_B = 4V_A$. Determinare la temperatura T_B del gas nello stato B. *(8 punti, compito completo)*

Soluzione Esercizio 1

Inizialmente la massa M ha energia potenziale

$$V_0 = \frac{1}{2}kL^2 \,, \tag{1}$$

che dopo lo sblocco della molla si traduce totalmente in energia cinetica per la conservazione dell'energia. Quindi, la velocità con cui M urta m è:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}L = 2 \text{ m/s} \,. \tag{2}$$

Nell'urto si conserva la quantità di moto, per cui si avrà:

$$Mv_0 = (M+m)v_1 \,, \tag{3}$$

da cui

$$v_1 = \frac{M}{M+m}v_0 = 1.43 \text{ m/s} \,, \tag{4}$$

che è la velocità orizzontale con cui il corpo di massa $M+m$ si stacca dal piano rialzato.

Per trovare S troviamo il tempo di caduta al suolo, che è dato da

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{5}$$

e lo uguagliamo al tempo in cui il corpo di velocità v_1 percorre S

$$t = \frac{S}{v_1} \,, \tag{6}$$

ottenendo:

$$\frac{2h}{g} = \frac{S^2}{v_1^2} \,. \tag{7}$$

Scartando la soluzione negativa si ha

$$S = \sqrt{\frac{2h}{g}}v_1 = 91 \text{ cm} \,. \tag{8}$$

Soluzione Esercizio 2

1. Usiamo la prima cardinale. Le forze a cui è soggetto il punto materiale sono

$$\mathbf{F}_1 = -kx\,\hat{\imath} \,, \tag{9}$$

$$\mathbf{F}_2 = 2k(L-x)\,\hat{\imath} - 2kL\,\hat{\jmath} \,. \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

Imponiamo lungo le x l'equilibrio:

$$-kx + 2k(L-x) = 0 \,, \tag{12}$$

ovvero

$$x = \frac{2}{3}L = 0.33 \text{ m} \,. \tag{13}$$

2. Si ha
$$m\ddot{x} = -kx + 2k(L-x) = -3kx + 2kL\,, \tag{14}$$
ovvero
$$\ddot{x} + \frac{3k}{m}x - \frac{2kL}{m} = 0\,, \tag{15}$$
moto armonico con periodo
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} = 0.57 \text{ s}\,. \tag{16}$$

3. Lungo le y abbiamo
$$N = mg + 2kL = 24.9 \text{ N}\,, \tag{17}$$
mentre lungo le x si ha
$$F_t = kL = 10 \text{ N}\,, \tag{18}$$
ovvero
$$kL \leq \mu_S(mg + 2kL)\,, \tag{19}$$
cioè:
$$\mu_S \geq \frac{kL}{mg + 2kL} = \frac{1}{2 + \frac{mg}{kL}} = 0.4 \tag{20}$$

Soluzione Esercizio 3

Applichiamo il secondo principio ai due blocchi mi massa m_1 e m_2. Si ha
$$\begin{aligned} m_1 a &= T_1 - m_1 g \sin\phi\,, & (21)\\ m_2 a &= m_2 g - T_2\,. & (22) \end{aligned}$$

Per la carrucola invece potremo scrivere la seconda cardinale centrata nel centro della carrucola (che coincide con l'asse di rotazione):
$$T_2 R - T_1 R = I\ddot{\theta}\,, \tag{23}$$
dove abbiamo indicato con θ l'angolo di rotazione della carrucola, con $\dot{\theta} > 0$ se ruota in senso orario. Siccome la fune non striscia sulla carrucola, si ha anche la relazione
$$R\ddot{\theta} = a\,, \tag{24}$$
che sostituita nella (23) dà:
$$(T_2 - T_1)R = I\frac{a}{R}\,. \tag{25}$$
Utilizzando le due relazioni (22), si ottiene:
$$\begin{aligned} I &= \frac{R^2}{a}(T_2 - T_1) = \frac{R^2}{a}(m_2 g - m_2 a - m_1 a - m_1 g \sin\phi)\\ &= \frac{R^2}{a}\Big\{(m_2 - m_1 \sin\phi)g - (m_2 + m_1)a\Big\} = 0.26 \text{ kg} \quad \text{m}^2 \qquad (26) \end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 4

Dall'equazione di stato nelle due configurazioni di equilibrio A e B si ottiene

$$p_A V_A = R T_A \,, \tag{27}$$

$$p_B V_B = R T_B \,, \tag{28}$$

dove $p_B = p_0$ e $V_B = 4V_A$. Quindi

$$p_0 = \frac{R T_B}{4 V_A} \,. \tag{29}$$

La trasformazione che subisce la mole di gas perfetto è un'adiabatica non reversibile, ma il sistema fa lavoro contro la pressione costante p_0, quindi il lavoro L è calcolabile come l'opposto del lavoro (negativo) subito dall'ambiente. Siccome $Q = 0$, il primo principio ci dice che

$$\Delta U = -L \,. \tag{30}$$

Il lavoro nella trasformazione $A \to B$ sarà dato da

$$L = \int_A^B p_0 dV = p_0 (V_B - V_A) > 0 \,, \tag{31}$$

come deve essere in quanto il gas si espande e quindi fa lavoro sull'ambiente. Usando la relazione (29) si ha

$$L = \frac{3}{4} R T_B \,. \tag{32}$$

Essendo il sistema un gas perfetto, si ha

$$\Delta U = \tilde{c}_V (T_B - T_A) \,, \tag{33}$$

dove $\tilde{c}_V$ è il calore specifico molare a volume costante, che per un gas monoatomico vale

$$\tilde{c}_V = \frac{3}{2} R \,. \tag{34}$$

In totale quindi si ha

$$\frac{3}{2} R (T_B - T_A) = -\frac{3}{4} R T_B \,, \tag{35}$$

ovvero

$$T_B = \frac{2}{3} T_A = 200^\circ \text{ K} \,. \tag{36}$$