Esami 2018-2021

Roberto Bonciani e Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anni Accademici 2017-2021

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 26 Giugno 2018

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1}\, dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Calcolare la parte principale di Laurent in $z = 0$ della seguente funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 \sin z} \,. \tag{2}$$

Esercizio 3 (3 pt)
Data la funzione

$$u(r, \theta) = r \cos\theta \tag{3}$$

dimostrare che tale funzione è la parte reale di una funzione analitica e trovare la sua parte immaginaria $v(r, \theta)$ tale che $v(r, 0) = 0$.

Esercizio 4 (5 pt)
Si trovi la soluzione del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + f \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} \tag{4}$$

1. nel caso $f \equiv 0$ e $x(0) = y(0) = 1$;
2. nel caso

$$f = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} \tag{5}$$

e $x(0) = y(0) = 0$.

Esercizio 5 (7 pt)
Trovare la soluzione $u(x,t)$ della seguente equazione differenziale alle derivate parziali

$$\partial_t u = D\,\partial^2_{x,x} u + f(x) \qquad -\infty < x < \infty\,, \tag{6}$$

in cui

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2} e^{-ax^2} \tag{7}$$

e

$$u(x,0) = e^{-ax^2}\,. \tag{8}$$

Esercizio 6 (4 pt)
Data l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma}} f(x-y) dy = e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \tag{9}$$

trovare la soluzione $f(x)$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \tag{10}$$

e discutere per quali valori di σ tale soluzione esiste.

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 11 Luglio 2018

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{(3 + 2\cos\theta)} d\theta$$

Esercizio 2 (5 pt)
Discutere le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2}$$

e calcolarne l'espansione di Laurent in $z = 0$ nei settori circolari d'interesse.

Esercizio 3 (3 punti)
Trovare i valori delle costanti a, b e c per i quali

$$u(x, y) = x^2 + ay^2 + bxy + cx$$

è la parte reale di una funzione analitica e trovare la sua parte immaginaria $v(x, y)$ tale che $v(0, 0) = 0$.

Esercizio 4 (3 punti)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + 2y + f_1 \ , \ \frac{dy}{dt} = -y + f_2$$

A) nel caso $f_1 = f_2 = 0$, trovare i valori di α tali che $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ per ogni condizione iniziale $x(0), y(0)$;

B) nel caso $f_1(t) = f_2(t) = e^{-2t}$, $\alpha = -1$, calcolare $x(t)$ con condizioni iniziali $x(0) = y(0) = 1$.

Esercizio 5 (6 punti)
Calcolare la funzione

$$f(x) = \int ... \int \delta\Big(\sum_{n=1}^{N} x_n - x\Big) \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1+x_n^2} d\,x_n$$

per $N = 2$ e $N = 3$, e (facoltativo) generalizzare al caso N generico.

Esercizio 6 (7 punti)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$-\frac{d^2}{dx^2} f(x) + f(x) = g(x)$$

nei casi:
A) $0 \leq x \leq \pi,\ f(0) = f(\pi) = 0$ e $g(x) = (sinx)^3$;

B) $-\infty < x < \infty$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ e

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

portare i calcoli fino in fondo solo per il caso $\sigma \to 0$.
Suggerimento 1 Serie e trasformate di Fourier.
Suggerimento 2 Qualche cosa dell' esercizio precedente è utile.

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 13 Settembre 2018

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log(x)}{x^2+1}\,dx\,. \tag{11}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Data la funzione

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right),$$

1. se ne individuino e classifichino le singolarità nel piano complesso (compreso il punto all'infinito);
2. se ne determini lo sviluppo di Laurent in $z = 0$;
3. se ne calcoli il residuo all'infinito.

Esercizio 3 (4 punti)
Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_{C_R} \frac{\log(z+3)}{z^2\sqrt{z+2}}\,, \tag{12}$$

dove C_R è la circonferenza centrata in $z = 0$ con raggio $R = 1$ percorsa in senzo antiorario, utilizzando, giustificandola, la formula integrale di Cauchy.

Esercizio 4 (4 punti)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{dx_n}{dt} = \sum_{k=1}^{N} A_{nk}x_k + f_n\,, \quad n = 1, 2, ..., N \tag{13}$$

dove $A_{ij} = 1$ per ogni coppia (i, j) e $f_i = 1$, scrivere $\mathbf{x}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $x_i(0) = 1/N$.
Suggerimento Studiare prima il caso con $f_i = 0$.

Esercizio 5 (5 punti)
Calcolare la funzione

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} (y-x) e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} dy \,. \tag{14}$$

Suggerimento Usare le proprietà della trasformata di Fourier di $xg(x)$ e di $dg(x)/dx$.

Esercizio 6 (7 punti, [2 + 5])
Data la funzione

$$f(\theta) = \frac{1+\cos(\theta)}{3+2\cos(\theta)} \tag{15}$$

e i suoi coefficienti di Fourier

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta} \, d\theta \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{16}$$

1. mostrare che per $n \gg 1$, f_n decade a zero più velocemente di n^{-m} per ogni valore di $m > 0$;

2. calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}|}{|f_n|} \,. \tag{17}$$

   Suggerimento Si pensi alla $f(\theta)$ come serie di Laurent rispetto alla variabile $z = e^{i\theta}$.

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 15 Novembre 2018

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 - 2x + 2}\, dx\,, \quad \text{con } k \in R \tag{18}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Si studino le singolarità nel piano complesso (compreso il punto all'infinito) della funzione

$$f(z) = \frac{1+z}{z^3 + 3z} \tag{19}$$

e svilupparla in serie di Laurent in $z = 0$ nei settori circolari d'interesse.

Esercizio 3 (4 pt)
La funzione di $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ nel segmento $y = 0$, $3.2 \le x \le 3.8$ vale

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^n\,,\ v(x,0) = 0\,. \tag{20}$$

Calcolare, spiegando le basi teoriche della procedura, $f(z)$ nel punto $z = 5 + i8$.

Esercizio 4 (5 pt)
Si considerino le funzioni $f(x)$ continue e derivabili nell'intervallo $[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$ e

$$F_N(x, x') = \sum_{n=1}^{N} \sin(nx) \sin(nx')\,. \tag{21}$$

Mostrare che

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(x') F_N(x, x') dx' = C f(x)\,, \tag{22}$$

e calcolare C.

Esercizio 5 (5 pt)
$\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ sono matrici diverse $N \times N$ tali che

$$\mathbf{A}_1^2 = c_1 \mathbf{A}_1 \ , \ \ \mathbf{A}_2^2 = c_2 \mathbf{A}_1 \ , \ \ \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \ , \tag{23}$$

calcolare, in termini di $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ la matrice $exp[\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2]$

Esercizio 6 (6 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -\partial^4_{xxxx} f(x,t) + g(x) \tag{24}$$

ove $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$, $g(x) = \sin(3x)$ e

$$f(x,0) = (sinx)^3 \, . \tag{25}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 21 Gennaio 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{(1+e^x)\cosh(x)}\,dx\,, \quad 0 < a < 1\,. \tag{26}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Determinare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = (1+z^2)^z\,. \tag{27}$$

Nel caso di funzioni polidrome, considerare il ramo principale.

Esercizio 3 (4 pt)
Si consideri la funzione analitica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Sulla retta reale $y = 0$, si ha

$$u(x,0) = (\sin x)^2\,, \quad v(x,0) = 0\,. \tag{28}$$

Calcolare, spiegando le basi teoriche della procedura, $f(z)$ nel punto $z = 5 + i8$.

Esercizio 4 (6 pt)
Si considerino le funzioni $f(x)$ continue e derivabili nell'intervallo $[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$ e

$$F_N(x,x') = \sum_{n=1}^{N} \sin(nx)\sin(nx')\,. \tag{29}$$

Mostrare che

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(x')F_N(x,x')dx' = Cf(x)\,, \tag{30}$$

e calcolare C.

Esercizio 5 (4 pt)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = -x + a\sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-n) \tag{31}$$

con condizione iniziale $x(0)$, si calcoli $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ ove x_n è $x(t)$ ad un tempo leggermente maggiore di $t = n$

$$x_n = \lim_{\epsilon\to 0^+} x(n+\epsilon) \ . \tag{32}$$

Suggerimento: si scriva x_n in termini di x_{n-1}.

Esercizio 6 (6 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) + g(x,t) \tag{33}$$

ove $\lim_{t\to\pm\infty} f(x,t) = 0$, $g(x,t) = \delta(t-1)e^{-2x^2}$ e

$$f(x,0) = e^{-x^2} \ . \tag{34}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 11 Febbraio 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^{2\pi x}-1}\,dx\,. \tag{35}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{e^z \sin(z)}{z^2\cosh(3z)}\,dz\,, \tag{36}$$

con γ circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine.

Esercizio 3 (5 pt)
Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{3}\right)^n\,, \tag{37}$$

calcolarne il valore in $z = 4 + i$, discutendo la procedura.

Esercizio 4 (5 pt)
Si considerino le funzioni $f(x)$ continue e derivabili nell'intervallo $[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$, $f'(0) = f'(\pi)$ e

$$F_N(x,x') = \sum_{n=1}^{N} n\cos(nx)\sin(nx')\,, \tag{38}$$

calcolare

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(x')F_N(x,x')dx'\,. \tag{39}$$

Esercizio 5 (5 pt)
Data la matrice 2×2, $\mathbf{A}$ i cui elementi sono

$$A_{11} = A_{22} = 1\ ,\ \ A_{21} = 0\ ,\ \ A_{21} = a\,, \tag{40}$$

calcolare, con un metodo a scelta, la matrice

$$M = e^{t\mathbf{A}}\,. \tag{41}$$

Esercizio 6 (5 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) + g(x,t)\,, \tag{42}$$

ove

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(x,t) = 0\,, \tag{43}$$

$$g(x,t) = \delta(t-1)\delta(e^{|x|}-2)\,, \tag{44}$$

$$f(x,0) = \delta(x^2-4)\,. \tag{45}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Bonciani-Vulpiani 13 Maggio 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{(\cos\theta+2)^2}\, d\theta\,. \tag{46}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Calcolare

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+8)}\, dz\,, \tag{47}$$

con γ quadrato di lato $L = 2$ centrato nell'origine, con i lati paralleli agli assi.

Esercizio 3 (4 pt)
Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = \cos x(e^{ay} + e^{-y}) \tag{48}$$

è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$ in tutto $\mathbb{C}$. Trovare le funzioni f.

Esercizio 4 (6 pt)
$\mathbf{A}$ è una matrice 3x3 con elementi

$$A_{ii} = \alpha\ ,\ A_{ij} = 1\ se\ j > i\ ,\ A_{ij} = 0\ se\ j < i\ ,$$

con α reale. Si trovi la soluzione dell'equazioni differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\ \ ,\ \ \mathbf{x} \in R^3$$

con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (1, 0, -1)$.

Esercizio 5 (5 pt)
Sia $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})$ un vettore con componenti complesse, e $\mathbf{F}$ l'operatore lineare che trasforma $\mathbf{x}$ in $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ nel modo seguente

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} F_{kn} x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} x_n\ ,\ k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

ove $i = \sqrt{-1}$, mostrare che $\mathbf{F}$ è un operatore unitario e calcolare $\mathbf{F}^{-1}$, cioè la matrice $(F^{-1})_{kn}$.

Esercizio 6 (5 pt)
Trovare la soluzione per $t > 0$ dell'equazione

$$\partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t)$$

ove $0 \leq x \leq 3$, con condizioni al bordo

$$u(0,t) = 0\ ,\ \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=3} = 0\,,$$

e condizione iniziale

$$u(x,0) = 4\sin\frac{\pi x}{2} - 3\sin\frac{5\pi x}{6}.$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
18 Giugno 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{(\sin\theta + 2)}\, d\theta \,. \tag{49}$$

Esercizio 2 (4 pt)
Calcolare

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+8)}\, dz \,, \tag{50}$$

con γ quadrato di lato $L = 2$ centrato nell'origine, con i lati paralleli agli assi, percorso in senso antiorario.

Esercizio 3 (4 pt)
Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = \cos x(e^{ay} + e^{-y}) \tag{51}$$

è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$ in tutto $\mathbb{C}$. Trovare le funzioni f.

Esercizio 4 (4 pt)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{dx_n}{dt} = \sum_{k=1}^{N} A_{nk} x_k + f_n \;\;,\;\; n = 1, 2, ..., N \tag{52}$$

ove $A_{ij} = 1$ per ogni coppia (i, j) e $f_i = 1$ scrivere $\mathbf{x}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $x_i(0) = 1/N$.

Esercizio 5 (6 pt)
Data la funzione

$$f(\theta) = \frac{1 + \cos(\theta)}{3 + 2\cos(\theta)} \tag{53}$$

e i sui coefficienti di Fourier

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{in\theta}\,d\theta \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{54}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}|}{|f_n|} \tag{55}$$

Suggerimento Si pensi alla $f(\theta)$ come serie di Laurent rispetto alla variabile $z = e^{i\theta}$.

Esercizio 6 (6 pt)
Data l'equazione

$$\partial_t u(x,t) = D\partial^2_{xx}u(x,t) + 2e^{-x^2}\delta\Big(t^2 - 2t + \frac{3}{4}\Big) \tag{56}$$

con $-\infty < x < \infty$ e condizione iniziale $u(x,0) = e^{-2x^2}$, calcolare $u(x,t)$.

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
2 Luglio 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (6 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^3+1}\, dx\,. \tag{57}$$

Suggerimento: si consideri la funzione $\log^2(z)/(z^3+1)$.

Esercizio 2 (4 pt)
Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1-\cos(z)}{e^{2iz}-1} \tag{58}$$

e calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma f(z)\, dz\,, \tag{59}$$

dove $\gamma\,:\, 2\pi + e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, circonferenza di raggio unitario centrata in $z = 2\pi$ percorsa in senso antiorario.

Esercizio 3 (4 pt)
Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+3n+2)}{4} \left(\frac{z}{2}\right)^n \tag{60}$$

e calcolarne il valore di $z = 3+i$.

Esercizio 4 (4 pt)
Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = -ax + by\ ,\ \ \frac{dy}{dt} = ax - by\ , \tag{61}$$

con $a > 0\,, b > 0$ e condizioni iniziali $x(0) = 1\,, y(0) = 2$. Calcolare il tempo t_* oltre il quale $|x(t) - x_*| < 10^{-3}$, dove $x_* = \lim_{t\to\infty} x(t)$.

Esercizio 5 (6 pt)
Trovare una soluzione dell'equazione

$$\frac{d^4}{dx^4}f(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}f(x) + f(x) = (\sin x)^3 - 2\sin 4x \tag{62}$$

con $0 \leq x \leq \pi$ e $f(0) = f(\pi) = 0$.

Esercizio 6 (6 pt)
Data l'equazione

$$\partial_t u(x,t) = D\, e^{-at}\partial^2_{xx}u(x,t) \tag{63}$$

con $a > 0$ e condizione iniziale

$$u(x,0) = e^{-x^2}\,\delta(x^4 - 1) \tag{64}$$

calcolare

$$f(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)\,. \tag{65}$$

Suggerimento: meglio evitare l'uso del propagatore.

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
12 Settembre 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (5 pt)
Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2}\, dx\,. \tag{66}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{z}{\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)}\,, \tag{67}$$

e nel caso di singolarità isolate calcolarne i residui.

Esercizio 3 (5 pt)
Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzionw

$$u(x,y) = e^{ax}\cos y \sin y \tag{68}$$

è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$ in tutto $\mathbb{C}$. Trovare le funzioni f.

Esercizio 4 (5 pt)
Si consideri la seguente regola ricorsiva

$$x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n \;\;,\;\; y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{5}{6}y_n\,, \tag{69}$$

con $x_0 = 0.4$ e $y_0 = 0.6$. Si calcoli x_N con $N = 10^5$.

Esercizio 5 (5 pt)
Si considerino le funzioni $f(x)$ continue e derivabili almeno due volte nell'intervallo $[0,\pi]$, con $f(0) = f(\pi) = 0$, e

$$F_N(x,x') = \sum_{n=1}^{N}(n^2+3)\sin(nx)\sin(nx')\,, \tag{70}$$

calcolare la funzione

$$g(x) = \lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f(x')F_N(x,x')dx' \,. \tag{71}$$

Si discuta il caso $f(x) = x(\pi - x)^3$.

Esercizio 6 (5 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \Big(2 - \theta(2-t)\Big)\partial^2_{xx} f(x,t) + g(x,t) \tag{72}$$

ove $-\infty < x < \infty$ e $g(x,t) = e^{-3x^2+x}\delta(t-3)$ con condizione iniziale

$$f(x,0) = e^{-5x^2-6x} \,. \tag{73}$$

NB: $\theta(z)$ indica la funzione gradino che vale 0 se $z < 0$ e 1 se $z \geq 0$.

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
27 Novembre 2019

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (5 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\, dx\,. \tag{74}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}\,, \tag{75}$$

e trovare lo sviluppo di Taylor (e il suo raggio di convergenza) in $z = 0$.

Esercizio 3 (5 pt)
Sia

$$u(x,y) = e^{2y}(2\sin^2 x - 1)\,. \tag{76}$$

Verificare che $u(x,y)$ è armonica in $\mathbb{R}^2$ e determinare una funzione $v(x,y)$ armonica coniugata di u.

Esercizio 4 (5 pt)
Dato lo spazio vettoriale di dimensioni $2N+1$ delle funzioni in $[0,\pi]$ della forma

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)\,, \tag{77}$$

a cui corrisponde il vettore

$$\mathbf{v} = (a_0, a_1, a_2, ..., a_N, b_1, b_2, ..., b_N)\,. \tag{78}$$

Scrivere la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta l'operatore derivata e la matrice $\mathbf{B}$ che rappresenta l'operatore derivata seconda.
Calcolare la matrice

$$\mathbf{C}(r) = e^{r\mathbf{A}}\,. \tag{79}$$

Volendo ci si può limitare al caso $N = 2$.
Suggerimento: per chiarirsi le idee, ed evitare di fare troppo calcoli, cominciare considerando il caso con r piccolo.

Esercizio 5 (5 pt)
Data la regola di ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \ , \ \ y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n \, , \tag{80}$$

con $x_0 = y_0 = 1$ calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \, . \tag{81}$$

Discutere il caso con x_0 e y_0 arbitrari.

Esercizio 6 (5 pt)
Data l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \frac{1}{(t+1)^\alpha} \partial^2_{xx} f(x,t) \, , \tag{82}$$

con condizione iniziale:

$$f(x,0) = e^{-x^2+6x} \tag{83}$$

trovare i valori di α tali che $\lim_{t\to\infty} f(x,t)$ è una funzione non nulla e determinare questa funzione.

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
20 Gennaio 2020

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (5 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)} dx \,. \tag{84}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4} \tag{85}$$

e calcolarne i residui al finito e all'infinito.

Esercizio 3 (5 pt)
Derterminare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = \cos x(e^{ay} + e^{-y}) \tag{86}$$

è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$ e trovare tali funzioni.

Esercizio 4 (5 pt)
$\mathbf{A}$ è una matrice 3x3 con elementi

$$A_{ii} = 1 \ , \ A_{ij} = 2 \ se \ j > i \ , \ A_{ij} = 0 \ se \ j < i \ . \tag{87}$$

Si trovi la soluzione dell'equazioni differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \ , \ \ \mathbf{x} \in R^3 \,, \tag{88}$$

con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 2)$.

Esercizio 5 (5 pt)
Sia $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})$ un vettore con componenti complesse, e $\mathbf{F}$ l'operatore lineare che trasforma $\mathbf{x}$ in $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ nel modo seguente

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} F_{kn} x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} x_n \ , \ \ k = 0, 1, 2, ..., N-1 \, , \tag{89}$$

ove $i = \sqrt{-1}$, mostrare che $\mathbf{F}$ è un operatore unitario e calcolare $\mathbf{F}^{-1}$, cioè la matrice $(F^{-1})_{kn}$.

Esercizio 6 (5 pt)
Trovare la soluzione per $t > 0$ dell'equazione

$$\partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) \, , \tag{90}$$

ove $0 \leq x \leq 3$, con condizioni al bordo

$$u(0,t) = 0 \ , \ \ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=3} = 0 \tag{91}$$

e condizione iniziale

$$u(x,0) = -3 \sin \frac{\pi x}{2} + 2 \sin \frac{5\pi x}{6} . \tag{92}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
18 Febbraio 2020

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1, 2, 3 su uno ed Es. 4, 5, 6 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (5 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^4-1)} dx \,. \tag{93}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Discutere le divergenze della funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) \tag{94}$$

e la convergenza della serie di Laurent in $z = 0$. In particolare calcolarne il coefficiente c_{-1}.

Esercizio 3 (5 pt)
La funzione analitica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sul segmento $y = 0$, $-1.5 < x < 1.5$ vale

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^{(n-1)} \,. \tag{95}$$

trovare $f(z)$ per $z = 3 + i$, spiegando la procedura.

Esercizio 4 (5 pt)
Si consideri la seguente regola ricorsiva

$$x_{n+1} = ax_n + ay_n + b^n \ , \ y_{n+1} = ax_n + ay_n + c^n \ , \tag{96}$$

ove a, b e c sono reali, $x_0 = 1, y_0 = 5$ si calcoli x_{1000}.

Esercizio 5 (5 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - C^2 f(x) = 2\delta(x-3) \tag{97}$$

con C reale e $lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Esercizio 6 (5 pt)
Data l'equazione

$$\partial_t u(x,t) = D(t)\partial^2_{xx} u(x,t) \tag{98}$$

con $D(t) = e^{-t}$, $-\infty < x < \infty$ e condizione iniziale $u(x,0) = e^{-2x^2+3x}$, calcolare $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
16 Giugno 2020 – Gruppo A

Esercizio 1 (10 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2 + 1}\, dx\,. \tag{99}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Discutere il comportamento nel punto all'infinito della seguente funzione:

$$f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) \tag{100}$$

e calcolarne il residuo all'infinito.

Esercizio 3 (10 pt)
Data l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^4_{xxxx} f(x,t) - \alpha\theta(t-1) f(x,t) \tag{101}$$

con $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$, per ognuna delle seguenti condizioni iniziali:

1. $f(x,0) = 4\sin 4x - 5\sin 18x$,
2. $f(x,0) = \sin 11x + \sin 23x$,
3. $f(x,0) = x(\pi - x)$,

dire per quali valori di α la soluzione non diverge per $t \to \infty$.

Esercizio 4 (5 pt)
Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \tag{102}$$

dire per quali valori di a e b è

1. autoaggiunta;
2. un proiettore.

Soluzione Es. 1

L'integrale è perfettamente definito e reale. Per calcolarlo notiamo che l'integrando è pari e quindi riesprimiamo l'integrale come segue

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx\,. \tag{103}$$

Consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{e^{i2z}-1}{z^2+1}\,, \tag{104}$$

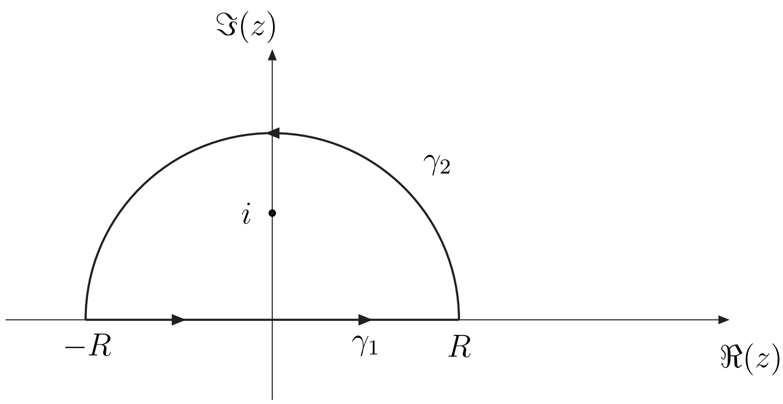
che sull'asse reale si riduce a

$$f(x) = \frac{\cos(2x)-1}{x^2+1} + i\,\frac{\sin(2x)}{x^2+1}\,. \tag{105}$$

$f(z)$ è analitica ovunque tranne nei due poli singoli

$$z = \pm i\,. \tag{106}$$

Consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,i) = \pi\,\left(e^{-2}-1\right)\,. \tag{107}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx + i\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(2x)}{x^2+1}\,dx\,. \tag{108}$$

Da notare che essendo il secondo integrando dispari, il secondo integrale è nullo (lo si vede anche dal teorema dei residui, come specificheremo sotto).

L'integrale sulla semicirconferenza si annulla. Infatti, considerando che il $\sin\theta > 0$ se $0 < \theta < \pi$, si ha

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{e^{2iR(\cos\theta + i\sin\theta)} - 1}{R^2 e^{2i\theta}+1} iRe^{i\theta}\, d\theta = 0\,, \tag{109}$$

(per il lemma di Jordan il primo pezzetto, mentre il secondo semplicemente va come $1/R$ per $R\to\infty$).

In totale si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x^2+1}\,dx = \pi\left(e^{-2}-1\right)\,, \tag{110}$$

ovvero

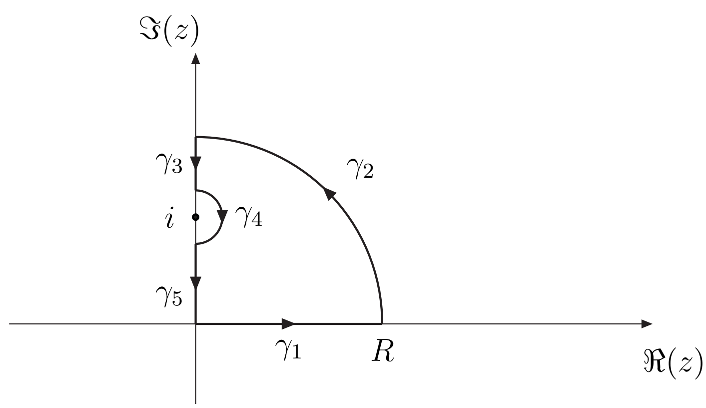
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx = \pi\left(e^{-2}-1\right)\,, \tag{111}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x^2+1}\,dx = 0\,. \tag{112}$$

Tornando al nostro integrale, si trova quindi

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}\left(e^{-2}-1\right)\,. \tag{113}$$

Alternativamente, possiamo considerare l'integrale della $f(z)$ sul cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0\,. \tag{114}$$

Prendendo i limiti $\lim_{R\to\infty}$ e $\lim_{r\to 0}$ si ha, quindi:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^{\infty}\frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx + i\int_0^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x^2+1}dx\,, \tag{115}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2iR(\cos\theta+i\sin\theta)}-1}{R^2e^{2i\theta}+1} iRe^{i\theta}\, d\theta = 0\,, \tag{116}$$

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_{\gamma_3+\gamma_5} f(z)dz = -PV\int_0^{\infty} \frac{e^{-2y}-1}{1-y^2}\, i\, dy\,, \tag{117}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_4} f(z)dz = -\pi i \mathrm{Res}(f,i) = -\frac{\pi}{2}(e^{-2}-1)\,, \tag{118}$$

dove abbiamo utilizzato il lemma degli archi infinitesimi nell'ultimo integrale.

Quindi, in totale abbiamo

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx + i\int_0^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x^2+1}dx \; - i\, PV\int_0^{\infty}\frac{e^{-2y}-1}{1-y^2}\, dy - \frac{\pi}{2}(e^{-2}-1) = 0\,, \tag{119}$$

ovvero, prendendo la parte reale della precedente relazione

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}(e^{-2}-1)\,. \tag{120}$$

Soluzione Es. 2

Studiamo la funzione nel punto all'infinito. Mandando

$$z \to \frac{1}{w}\,, \tag{121}$$

si ha

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}\cos(w)\,, \tag{122}$$

che per $w \to 0$ diventa

$$f\left(\frac{1}{w}\right) \simeq \frac{1}{w^3}\left(1 - \frac{w^2}{2} + ...\right)\,, \tag{123}$$

cioè la funzione $f(z)$ è singolare nel punto all'infinito, dove ha un polo triplo.

Il residuo all'infinito è dato dal residuo in zero della funzione

$$-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^5}\cos(w)\,. \tag{124}$$

Quindi, siccome

$$-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right) \simeq -\frac{1}{w^5}\left(1-\frac{w^2}{2}+\frac{w^4}{24}+...\right) = -\frac{1}{w^5}+\frac{1}{2w^3}-\frac{1}{24w}+... \tag{125}$$

infine si ha

$$\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right) = -\frac{1}{24}\,. \tag{126}$$

Soluzione Es. 3

1. $a = b$ reali.
2. $a = b = 1/3$.

Soluzione Es. 4

Date le condizioni al bordo si può sviluppare in serie di seni

$$f(x,t) = \sum_n b_n(t) \sin nx$$

sostituendo nell'equazione

$$\frac{d}{dt} b_n(t) = \Big(n^4 - \alpha\theta(t-1) \Big) b_n(t)$$

che può essere facilmente risolta, ovviamene eventuali problemi si hanno solo per $t > 1$, quindi per non avere divergenza si deve avere che per tutti gli n coinvolti $n^4 - \alpha$ deve essere non positivo, quindi

$$\alpha \geq n_M^4$$

ove n_M è il valore massimo di n nella condizione iniziale, quindi
a) $\alpha \geq 18^4$
b) $\alpha \geq 23^4$
c) poiché nello sviluppo si ha una somma infinita nessun valore di α soddisfa la richiesta

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
16 Giugno 2020 – Gruppo B

Esercizio 1 (10 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}\, dx\,. \tag{127}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Discutere il comportamento nel punto all'infinito della seguente funzione:

$$f(z) = z^4 \sin\left(\frac{1}{z}\right) \tag{128}$$

e calcolarne il residuo all'infinito.

Esercizio 3 (10 pt)
Data l'equazioni

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) + \delta(t^2 - 1)(\sin 3x - 2\sin 2x) \tag{129}$$

con $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$ e condizioni iniziali:

$$f(x.0) = 4\sin 4x - 5\sin 2x \tag{130}$$

trovare la soluzione $f(x,t)$.

Esercizio 4 (5 pt)
Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & a \\ 0 & c & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \tag{131}$$

dire per quali valori di a, b e c è

1. autoaggiunta;
2. un proiettore.

Soluzione Es. 1

L'integrale è perfettamente definito e reale. Per calcolarlo notiamo che l'integrando è pari e quindi riesprimiamo l'integrale come segue

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx \,. \tag{132}$$

Consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{e^{i2z} - 1}{z^2} \,, \tag{133}$$

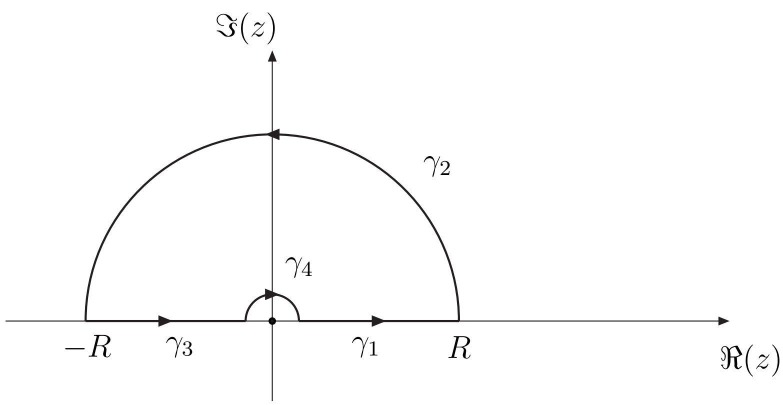
che sull'asse reale si riduce a

$$f(x) = \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} + i\,\frac{\sin(2x)}{x^2} \,. \tag{134}$$

$f(z)$ è analitica ovunque tranne nel polo singolo

$$z = 0 \,. \tag{135}$$

Consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0 \,. \tag{136}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_{\gamma_3+\gamma_1} f(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx + iPV \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(2x)}{x^2}\, dx \,. \tag{137}$$

L'integrale sulla semicirconferenza di raggio R si annulla. Infatti, considerando che il $\sin\theta > 0$ se $0 < \theta < \pi$, si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = \lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \frac{e^{2iR(\cos\theta + i\sin\theta)} - 1}{R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}\, d\theta = 0 \,, \tag{138}$$

(per il lemma di Jordan il primo pezzetto, mentre il secondo semplicemente va come $1/R$ per $R \to \infty$).

L'ultimo contributo si ottiene col lemma degli archi infinitesimi:

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_4} f(z)\, dz = -\pi i \mathrm{Res}\,(f, 0) = 2\pi\,. \tag{139}$$

In totale si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx + iPV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}\, dx = -2\pi\,, \tag{140}$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx = -2\pi\,, \tag{141}$$

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}\, dx = 0\,. \tag{142}$$

Tornando al nostro integrale, si trova quindi

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx = -\pi\,. \tag{143}$$

Soluzione Es. 2

Studiamo la funzione nel punto all'infinito. Mandando

$$z \to \frac{1}{w}\,, \tag{144}$$

si ha

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^4} \sin(w)\,, \tag{145}$$

che per $w \to 0$ diventa

$$f\left(\frac{1}{w}\right) \simeq \frac{1}{w^4}\left(w - \frac{w^3}{6} + ...\right)\,, \tag{146}$$

cioè la funzione $f(z)$ è singolare nel punto all'infinito, dove ha un polo triplo.

Il residuo all'infinito è dato dal residuo in zero della funzione

$$-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^6} \sin(w)\,. \tag{147}$$

Quindi, siccome

$$-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \simeq -\frac{1}{w^6}\left(w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{120} ...\right) = -\frac{1}{w^5} + \frac{1}{6w^3} - \frac{1}{120w} ... \tag{148}$$

infine si ha

$$\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right) = -\frac{1}{120}\,. \tag{149}$$

Soluzione Es. 3

1. a e c reali, $b = 0$.
2. $b = 0$, $c = 1$ e $a = 1/2$.

Soluzione Es. 4

Date le condizioni al bordo si può sviluppare in serie di seni

$$f(x,t) = \sum_n b_n(t) \sin nx$$

sostituendo nell'equazione

$$\frac{d}{dt} b_n(t) = -n^2 b_n(t) + \delta(t^2 - 1)(\delta_{n,3} - 2\delta_{n,2})$$

Per $n \neq 3$ e $n \neq 2$ si ha

$$b_n(t) = b_n(0) e^{-n^2 t}$$

poiché ci interessano solo $t > 0$ abbiamo

$$\frac{d}{dt} b_3(t) = -9 b_3(t) + \frac{1}{2}\delta(t-1)$$

$$\frac{d}{dt} b_2(t) = -4 b_2(t) - \delta(t-1)$$

date le condizioni iniziale e la forzante basta considerare solo $n = 2, 3$ e $n = 4$, per $t < 1$:

$$b_2(t) = -5e^{-4t} \ , \ b_3(t) = 0 \ \ e \ \ b_4(t) = 4e^{-16t} \,.$$

Per $t > 1$ si ha

$$b_2(t) = -5e^{-4t} - \int_1^t e^{-4(t-t')}\delta(t'-1)dt' = -5e^{-4t} - e^{-4(t-1)}$$

$$b_3(t) = \frac{1}{2}\int_1^t e^{-9(t-t')}\delta(t'-1)dt' = \frac{1}{2}e^{-9(t-1)}$$

$$b_4(t) = 4e^{-16t} \,.$$

quindi

$$f(x,t) = b_2(t)\sin 2x + b_3(t)\sin 3x + b_4(t)\sin 4x.$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
30 Giugno 2020 – Gruppo A

Esercizio 1 (10 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}\,dx\,. \tag{150}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Dire per quale valore di α la seguente funzione può essere considerata la parte reale di una funzione analitica:

$$u(x,y) = \frac{x^\alpha}{x^2+y^2}\,. \tag{151}$$

Esercizio 3 (6 pt)
Data la matrice $N \times N$, $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ (la matrice identità) mostrare che per ogni x reale vale la relazione

$$e^{ix\mathbf{A}} \;=\; \cos x\,\mathbf{I} + i\sin x\,\mathbf{A}\,. \tag{152}$$

Esercizio 4 (9 pt)
Data l'equazioni sulla retta

$$\partial_t f(x,t) = 2t\,\partial^2_{xx} f(x,t) + \delta(t^2-6t+5)\,\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{153}$$

con

$$f(x,0) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{154}$$

trovare la soluzione $f(x,t)$.

Soluzione Es. 1

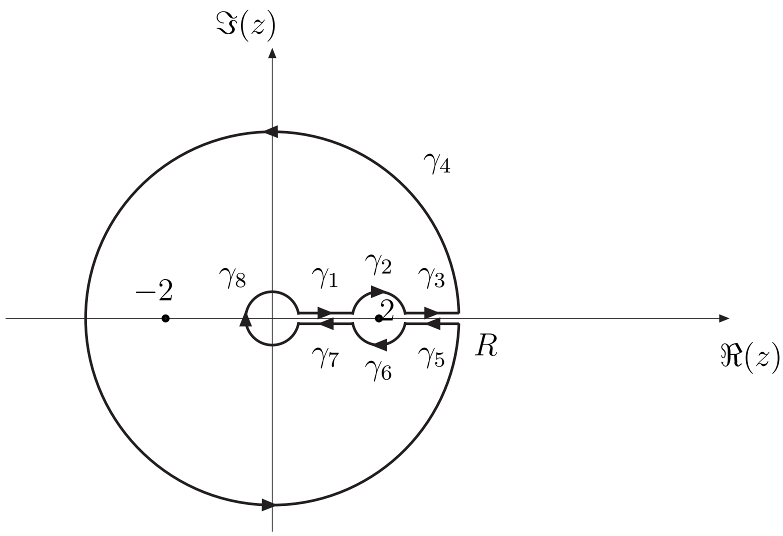
Per calcolare l'integrale consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 - 4}\,. \tag{155}$$

$f(z)$ ha un taglio dovuto alla radice e due poli semplici in

$$z = \pm 2\,. \tag{156}$$

Il polo $z = 2$ giace sul cammino d'integrazione. Poniamo il taglio della radice sul cammino d'integrazione e consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6+\gamma_7+\gamma_8$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,-2) = 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,. \tag{157}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_{\gamma_1+\gamma_3} f(z) = PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}dx\,, \tag{158}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_2} f(z) = -i\pi\mathrm{Res}(f,2) = -i\pi\frac{\sqrt{2}}{4}\,, \tag{159}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4} f(z) = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}}}{R^2e^{i2\theta}-4}\,iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,, \tag{160}$$

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_{\gamma_5+\gamma_6} f(z) = PV\int_\infty^0\left(-\frac{\sqrt{x}}{x^2-4}\right)dx = PV\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{x^2-4}dx\,, \tag{161}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_6} f(z) = -i\pi\mathrm{Res}(\tilde{f},2) = i\pi\frac{\sqrt{2}}{4}\,, \tag{162}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_8} f(z) \quad = \quad \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}{r^2e^{i2\theta}-4}\, ire^{i\theta}\, d\theta = 0\,. \tag{163}$$

La funzione $\tilde{f}$ in Eq. (196) è la $f(z)$ valutata sul taglio da sotto e quindi è

$$\tilde{f}(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x^2-4}\,. \tag{164}$$

In totale, quindi, i contributi in $z=2$ si annullano e otteniamo

$$2\,PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,, \tag{165}$$

ovvero

$$PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\,. \tag{166}$$

Soluzione Es. 2

Per essere la parte reale di una funzione analitica, la $u(x,y)$ deve essere armonica. Imponiamo dunque che $\Delta u(x,y)=0$. Abbiamo

$$\frac{d}{dx}u(x,y) \quad = \quad \frac{x^{\alpha-1}\left[(\alpha-2)x^2+\alpha y^2\right]}{(x^2+y^2)^2}\,, \tag{167}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x,y) \quad = \quad \frac{(x^{(\alpha-2)}((\alpha-3)(\alpha-2)x^4+2((\alpha-3)\alpha-1)x^2y^2+(\alpha-1)\alpha y^4))}{(x^2+y^2)^3}\,, \tag{168}$$

$$\frac{d}{dy}u(x,y) \quad = \quad -\frac{2x^\alpha y}{(x^2+y^2)^2}\,, \tag{169}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}u(x,y) \quad = \quad -\frac{2x^\alpha(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,. \tag{170}$$

Quindi

$$\Delta u(x,y) = \frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}\left[(\alpha-4)x^2+\alpha y^2\right]}{(x^2+y^2)^2} = 0\,, \tag{171}$$

se $\alpha = 1$.

Soluzione Es. 3

Separando le potenze pari e quelle dispari abbiamo

$$e^{ix\mathbf{A}} = \sum_{n=0}\frac{i^nx^n}{n!}\mathbf{A}^n = \sum_{p=0}\frac{i^{2p}x^{2p}}{(2p)!}\mathbf{A}^{2p} + \sum_{p=0}\frac{i^{2p+1}x^{2p+1}}{(2p+1)!}\mathbf{A}^{2p+1} \tag{172}$$

usando $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$ si ottiene

$$\mathbf{A}^{2p} = \mathbf{I}\ \ ,\ \ \mathbf{A}^{2p+1} = \mathbf{A} \tag{173}$$

da cui

$$e^{ix\mathbf{A}} = \sum_{p=0}\frac{i^{2p}x^{2p}}{(2p)!}\mathbf{I} + \sum_{p=0}\frac{i^{2p+1}x^{2p+1}}{(2p+1)!}\mathbf{A} \tag{174}$$

poiché $i^{2p} = (-1)^p$ e $i^{2p+1} = i(-1)^p$

$$e^{ix\mathbf{A}} = \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...\Big)\mathbf{I} + i\Big(x - \frac{x^3}{3!} + ...\Big)\mathbf{A} = \cos x\,\mathbf{I} + i\sin x\,\mathbf{A} \tag{175}$$

Soluzione Es. 4

Notiamo che

$$\delta(t^2 - 6t + 5) = \frac{1}{4}\delta(t-1) + \frac{1}{4}\delta(t-5)\,. \tag{176}$$

Occupiamoci della soluzione per $t < 1$: passando in trasformata di Fourier abbiamo

$$\frac{d\hat{f}(k,t)}{dt} = -2tk^2\hat{f}(k,t) \;\;\rightarrow\;\; \hat{f}(k,t) = e^{-t^2k^2}\hat{f}(k,0) \tag{177}$$

ritornando a $f(x,t)$ abbiamo gli stessi calcoli dell'equazione del calore con l'unica differenza di avere t^2 invece di t quindi

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2\pi}}\int e^{-\frac{(x-x')^2}{4t^2}} f(x',0)\,dx' \tag{178}$$

usando il teorema di convoluzione e le proprietá delle trasformate di Fourier delle gaussiane si ha

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(4t^2+2)\pi}} e^{-\frac{x^2}{(4t^2+2)}}\,. \tag{179}$$

Per $t > 1$ dobbiamo aggiungere anche

$$f_1(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4(t^2-t'^2)\pi}}\int e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t^2-t'^2)}}\delta(t'-1)\frac{e^{-\frac{x'^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt'\,dx'\,, \tag{180}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(4(t^2-1)+2)\pi}} e^{-\frac{x^2}{4(t^2-1)+2}} \tag{181}$$

in modo analogo per $t > 5$ si deve aggiungere, oltre a $f_1(x,t)$, anche

$$f_2(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4(t^2-t'^2)\pi}}\int e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t^2-t'^2)}}\delta(t'-5)\frac{e^{-\frac{x'^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt'\,dx'\,, \tag{182}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(4(t^2-5^5)+2)\pi}} e^{-\frac{x^2}{4(t^2-5^2)+2}}\,. \tag{183}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
30 Giugno 2020 – Gruppo B

Esercizio 1 (10 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 16}\, dx\,. \tag{184}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Dire per quale valore di α la seguente funzione può essere considerata la parte reale di una funzione analitica:

$$u(x, y) = \cosh(x)\cos(\alpha y)\,. \tag{185}$$

Esercizio 3 (6 pt)
Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \tag{186}$$

1. dire per quali valori di c e s è unitaria
2. se esistono valori reali di c e s tali che è contemporaneamente unitaria e autoggiunta, se si quali sono gli autovalori.

Esercizio 4 (9 pt)
Data l'equazioni sulla retta

$$\partial_t f(x, t) = \partial^2_{xx} f(, t) - f(x, t) - \partial_x f(x, t)\,, \tag{187}$$

con

$$f(x, 0) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{188}$$

trovare la soluzione $f(x, t)$ e fare un disegno qualitativo a due tempi t_1 e $t_2 > t_1$.

Soluzione Es. 1

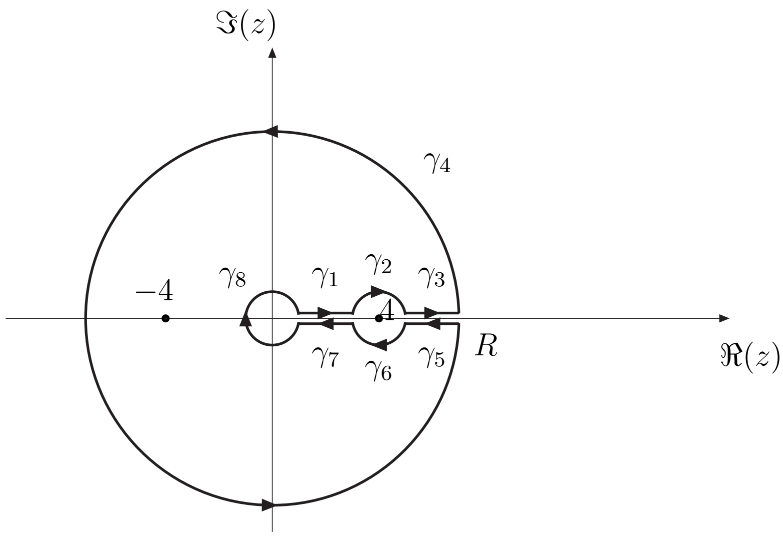
Per calcolare l'integrale consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 - 16}. \tag{189}$$

$f(z)$ ha un taglio dovuto alla radice e due poli semplici in

$$z = \pm 4. \tag{190}$$

Il polo $z = 4$ giace sul cammino d'integrazione. Poniamo il taglio della radice sul cammino d'integrazione e consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -4) = 2\pi i \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi. \tag{191}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_{\gamma_1+\gamma_3} f(z) = PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-16} dx, \tag{192}$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_2} f(z) = -i\pi \operatorname{Res}(f, 4) = -i\pi\frac{1}{4}, \tag{193}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} f(z) = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}}}{R^2 e^{i2\theta} - 16}\, iRe^{i\theta}\, d\theta = 0, \tag{194}$$

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_{\gamma_5+\gamma_6} f(z) = PV \int_\infty^0 \left(-\frac{\sqrt{x}}{x^2-16}\right) dx = PV \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-16} dx, \tag{195}$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_6} f(z) = -i\pi \operatorname{Res}(\tilde{f}, 4) = i\pi\frac{1}{4}, \tag{196}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_8} f(z) \;=\; \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}{r^2e^{i2\theta}-16}\, ire^{i\theta}\, d\theta = 0\,. \tag{197}$$

La funzione $\tilde{f}$ in Eq. (196) è la $f(z)$ valutata sul taglio da sotto e quindi è

$$\tilde{f}(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x^2-16}\,. \tag{198}$$

In totale, quindi, i contributi in $z = 4$ si annullano e otteniamo

$$2\,PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-16}dx = \frac{\pi}{2}\,, \tag{199}$$

ovvero

$$PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-16}dx = \frac{\pi}{4}\,. \tag{200}$$

Soluzione Es. 2

Per essere la parte reale di una funzione analitica, la $u(x, y)$ deve essere armonica. Imponiamo dunque che $\Delta u(x, y) = 0$. Abbiamo

$$\frac{d}{dx}u(x,y) \;=\; \sinh(x)\cos(\alpha y)\,, \tag{201}$$
$$\frac{d^2}{dx^2}u(x,y) \;=\; \cosh(x)\cos(\alpha y)\,, \tag{202}$$
$$\frac{d}{dy}u(x,y) \;=\; -\alpha\cosh(x)\sin(\alpha y)\,, \tag{203}$$
$$\frac{d^2}{dy^2}u(x,y) \;=\; -\alpha^2\cosh(x)\cos(\alpha y)\,. \tag{204}$$

Quindi

$$\Delta u(x,y) = -(\alpha^2-1)\,\cosh(x)\cos(\alpha y) = 0\,, \tag{205}$$

se $\alpha = \pm 1$.

Soluzione Es. 3

Affinché $\mathbf{A}$ sia unitaria si deve avere per ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ax}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \tag{206}$$

facendo il calcolo si ha

$$c^2 + s^2 = 1\,. \tag{207}$$

Affinché $\mathbf{A}$ sia anche autoaggiunta $s = 0$, quindi abbiamo solo due possibilitá $c = 1$ con autovalori 1 e $c = -1$ con autovalori -1.

Soluzione Es. 4

Passando in trasformata di Fourier abbiamo

$$\frac{d\hat{f}(k,t)}{dt} = (-k^2 - 1 - ik)\hat{f}(k,t) \quad \rightarrow \quad \hat{f}(k,t) = e^{-t}\Big(e^{-ikt}e^{-tk^2}\hat{f}(k,0)\Big) \tag{208}$$

ritornando a $f(x,t)$ il calcolo si puó fare facilmente usando le proprietá delle trasformate di Fourier (la moltiplicazione per e^{-iak} nella trasformata di Fourier corrisponde ad spostamento da x ad $x-a$ nella funzione) il problema si riconduce al caso dell'equazione del calore in cui al posto di x si sostituisce $x-t$ abbiamo quindi

$$f(x,t) = e^{-t}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int e^{-\frac{(x-t-x')^2}{4t}}e^{-\frac{x'^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx' = \frac{e^{-t}}{\sqrt{(4t+2)\pi}}e^{-\frac{(x-t)^2}{4t+2}}\ . \tag{209}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
10 Settembre 2020 – Gruppo A in presenza

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1 e 2 su uno ed Es. 3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo.

Esercizio 1 (9 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx \,. \tag{210}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Calcolare i seguenti integrali utilizzando sia la formula integrale di Cauchy, che il teorema dei residui (giustificare i vari passaggi):

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz \,, \tag{211}$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}}{z(z+1)} dz \,, \tag{212}$$

dove $\gamma_1 = 1 + e^{i\theta}$ e $\gamma_2 = 1 + \frac{3}{2}e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Esercizio 3 (5 pt)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x} \,, \tag{213}$$

ove

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{214}$$

mostrare che la matrice

$$\mathcal{U}(t) = e^{t\mathcal{A}} \,, \tag{215}$$

che determina la soluzione, cioe'

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{U}(t)\mathbf{x}(0) \tag{216}$$

e' unitaria per ogni t.

Esercizio 4 (10 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -e^{-t} f(x,t) - t\partial_x f(x,t) \tag{217}$$

con $-\infty < x < \infty$ e con condizione iniziale

$$f(x,0) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} \,. \tag{218}$$

Soluzione Es. 1

Consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} = \frac{1}{(z-1)(z-i)(z+i)} \,. \tag{219}$$

La $f(z)$ ha tre poli semplici in

$$z = 1\,, \quad z = \pm i\,. \tag{220}$$

Quindi c'è un polo semplice sul cammino d'integrazione e facciamo l'integrale in valor principale.

Consideriamo il cammino chiuso formato da $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ con

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= t\,, \quad -R \le t \le 1-\epsilon\,, && (221)\\
\gamma_2 &= t\,, \quad 1+\epsilon \le t \le R\,, && (222)\\
\gamma_3 &= 1 + \epsilon e^{i\theta}\,, \quad -\pi \le \theta \le 0\,, && (223)\\
\gamma_4 &= Re^{i\theta}\,, \quad 0 \le \theta \le \pi\,. && (224)
\end{aligned}$$

Il polo in $z = i$ è interno al cammino d'integrazione. Usando il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0}\int_\gamma \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1}dz &= PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_3}\frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1}dz\,,\\
&\quad + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4}\frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1}dz\,,\\
&= 2\pi i\, Res(f,i)\,, && (225)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
Res(f,i) &= \lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)(z+i)} = -\frac{1-i}{4}\,, && (226)\\
\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4}\frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1}dz &= 0\,, && (227)\\
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_3}\frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1}dz &= -\pi i\, Res(f,1)\,, && (228)\\
Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2}\,. && (229)\\
& && (230)
\end{aligned}$$

In totale si ha

$$PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}dx = 2\pi i\left(-\frac{1-i}{4} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}\,. \tag{231}$$

Soluzione Es. 2

- La funzione

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} = \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2(z-1)^2} \tag{232}$$

ha un polo singolo in $z = 1$ e in $z = -1$. La divergenza in $z = 1$ è interna al cammino di integrazione. Invece la

$$g(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2} \tag{233}$$

è analitica in $Int\{\gamma\}$.

Utilizzando il teorema dei residui abbiamo

$$I_1 = 2\pi i\, Res(f, 1)\,, \tag{234}$$

dove

$$f(z) \simeq -\frac{\pi}{4}\frac{1}{z-1} + ... \tag{235}$$

quindi

$$I_1 = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -i\frac{\pi^2}{2}\,. \tag{236}$$

Con la formula integrale di Cauchy abbiamo

$$g'(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz\,, \tag{237}$$

da cui

$$I_1 = 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2} = 2\pi i \lim_{z\to 1}\left(\frac{\pi\cos(\pi z)}{(z+1)^2} - \frac{2\sin(\pi z)}{(z+1)^3}\right) = -i\frac{\pi^2}{2}\,. \tag{238}$$

- La funzione

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z(z+1)} \tag{239}$$

ha un polo in $z = 0$ e uno in $z = -1$. Il polo in $z = 0$ è interno al cammino d'integrazione. La funzione

$$g(z) = \frac{e^{z^2}}{(z+1)} \tag{240}$$

è analitica in $Int\{\gamma\}$.

Troviamo il residuo in $z = 0$:

$$f(z) \simeq \frac{1}{z} + z + ... \tag{241}$$

Quindi

$$I_2 = 2\pi i\, Res(f, 0) = 2\pi i\,. \tag{242}$$

Utilizzando la formula integrale di Cauchy abbiamo

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i} I_2 \,, \tag{243}$$

quindi

$$I_2 = 2\pi i \lim_{z \to 0} g(z) = 2\pi i \,. \tag{244}$$

Soluzione Es. 3

Si può procedere in 2 modi:
I - Calcolare in qualche modo $\mathcal{U}(t)$, si trova facilmente

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{245}$$

e si verifica che è unitaria.
II - Notando che l'equazione si può scrivere

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -x_1 \tag{246}$$

abbiamo un oscillatore armonico, per la conservazione dell'energia si ha

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = x_1(0)^2 + x_2(0)^2 \tag{247}$$

Soluzione Es. 4

Passando in trasformata di Fourier si ha

$$\frac{d}{dt} F(k,t) = e^{-t} F(k,t) - iktF(k,t) \tag{248}$$

$$F(k,t) = e^{-g(t)} e^{-ih(t)k} F(k,0) \tag{249}$$

ove $g(t) = \int_0^t e^{-t'} dt' = 1 - e^{-t}$, $h(t) = t^2/2$.

Quindi

$$f(x,t) = e^{-g(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikx} e^{-ih(t)k} F(k,0) dk \tag{250}$$

ricordando che la trasformata di Fourier di $G(x-a)$ è la trasformata di $G(x)$ moltiplicata per e^{-ika}, si ha, senza dover calcolare esplicitamente $F(k,0)$:

$$f(x,t) = e^{-g(t)} f(x-h(t),0) = e^{-g(t)} \frac{e^{-(x-h(t))^2}}{1+(x-h(t))^2} \,. \tag{251}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
11 Settembre 2020 – Gruppo B in remoto

Esercizio 1 (9 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1} dx \,. \tag{252}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Calcolare i seguenti integrali utilizzando sia la formula integrale di Cauchy, che il teorema dei residui (giustificare i vari passaggi):

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{2\sinh(z)}{z^4} \,, \tag{253}$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} \,, \tag{254}$$

dove $\gamma_1 = e^{i\theta}$ e $\gamma_2 = -1 + 3e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$.

Esercizio 3 (5 pt)
Data la matrice $N \times N$

$$\mathcal{A} = a\mathcal{P}_1 + b\mathcal{P}_2 \tag{255}$$

ove $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sono proiettori tra loro ortogonali, $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = 0$, si discuta per quali valori di a e b esiste la matrice inversa $\mathcal{A}^{-1}$ per $N = 2$ e $N \ge 3$.

Esercizio 4 (10 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial^4_{xxxx} f(x) + f(x) = \cos x - (\sin x)^2 \tag{256}$$

con condizione al bordo

$$f(0) = f(\pi) \;,\; f'(0) = f'(\pi) \,. \tag{257}$$

Soluzione Es. 1

L'integrando è pari, quindi possiamo considerare

$$\tilde{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = 2I\,. \tag{258}$$

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}\,, \tag{259}$$

analitica ovunque nel piano complesso tranne nei punti

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3\,. \tag{260}$$

Consideriamo il cammino chiuso formato dal segmento γ_1 sull'asse reale, $-R \leq x \leq R$, e dalla semicirconferenza $\gamma_2 = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. I due poli semplici $k = 0, 1$ sono interni al percorso $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Per il teorema dei residui abbiamo

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma \frac{z^2}{z^4+1} dz = 2I + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{z^4+1} dz = 2\pi i\, \left(Res(f, z_0) + Res(f, z_1)\right)\,, \tag{261}$$

dove

$$\begin{aligned} Res(f, z_0) &= \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)\,, &(262)\\ Res(f, z_1) &= -\frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\,, &(263)\\ \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{z^4+1} dz &= 0\,. &(264) \end{aligned}$$

In totale

$$I = \frac{1}{2}\left[2\pi i \frac{1}{4}\, \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\,. \tag{265}$$

Soluzione Es. 2

- La funzione

  $$f(z) = \frac{2\sinh(z)}{z^4} \tag{266}$$

  ha un polo terzo all'interno del cammino d'integrazione. Mentre la

  $$g(z) = 2\sinh z \tag{267}$$

  è analitica ovunque.

  Per la formula integrale di Cauchy abbiamo

  $$g'''(0) = \frac{3!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{2\sinh(w)}{w^4} dw\,, \tag{268}$$

quindi

$$\int_\gamma \frac{2\sinh(z)}{z^4}dz = \frac{1}{3}\pi i\ \left(2\sinh(z)\right)'''|_0 = \frac{2}{3}\pi i\ \cosh(0) = \frac{2}{3}\pi i\,. \tag{269}$$

Cerchiamo il residuo di $f(z)$, sviluppando in un intorno di $z = 0$:

$$f(z) \simeq \frac{2}{z^3} + \frac{1}{3z} + ... \tag{270}$$

Quindi, per il teorema dei residui, si ha

$$\int_\gamma \frac{2\sinh(z)}{z^4}dz = 2\pi i Res(f,0) = \frac{2}{3}\pi i\,. \tag{271}$$

- La funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} = \frac{e^z}{4}\left(\frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{(z+3)^2} - \frac{4}{(z+3)}\right) \tag{272}$$

ha due poli in $z = -3$ e $z = 1$, entrambi interni al cammino d'integrazione.

Utilizzando il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz = 2\pi i\left(\lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+3)^2} - \lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{(z-1)}\right) = \frac{\pi i}{8}\left(e - 5e^{-3}\right)\,. \tag{273}$$

Per utilizzare la formula integrale di Cauchy si può fare in diversi modi. Il più semplice è utilizzare la forma in fratti semplici della funzione:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz = \int_\gamma \frac{e^z}{4}\left(\frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{(z+3)^2} - \frac{4}{(z+3)}\right)dz\,. \tag{274}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{e^z}{16(z-1)} &= 2\pi i\lim_{z\to 1}\frac{e^z}{16} = \frac{\pi i}{8}e\,, && (275)\\
\int_\gamma \frac{e^z}{4(z+3)^2} &= 2\pi i\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{4} = \frac{\pi i}{2}e^{-3}\,, && (276)\\
\int_\gamma \frac{e^z}{16(z+3)} &= 2\pi i\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{16} = \frac{\pi i}{8}e^{-3}\,. && (277)
\end{aligned}$$

In totale

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)}dz = \frac{\pi i}{8}\left(e - 4e^{-3} - e^{-3}\right) = \frac{\pi i}{8}\left(e - 5e^{-3}\right)\,. \tag{278}$$

Soluzione Es. 3

Per $N = 2$ abbiamo (teorema spettrale) che a e b sono gli autovalori, quindi l'inversa esiste se sia a che b non sono nulli.
Per $N \geq 3$ possiamo scrivere

$$\mathcal{A} = a\mathcal{P}_1 + b\mathcal{P}_2 + \sum_{n \geq 3} c_n \mathcal{P}_n \,, \tag{279}$$

ove $c_n = 0$, quindi ci sono sempre autovalori nulli, abbiamo che non esiste mai l'inversa.

Soluzione Es. 4

Usando le formule di Eulero scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{d^4}{dx^4} f(x) + f(x) = g(x) = -\frac{1}{2} + \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \tag{280}$$

Sviluppiamo $f(x)$ in serie di coseni (come ovvio dalle condizioni al bordo)

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1} a_n \cos nx \tag{281}$$

sostituendo dell'equazione abbiamo

$$a_n = \frac{g_n}{n^4 + 1} \tag{282}$$

ove i $\{g_n\}$ sono i coefficienti dello sviluppo di $g(x)$. Gli unici termini non nulli sono

$$g_0 = -\frac{1}{2} \ , \ g_1 = 1 \ , \ g_2 = \frac{1}{2} \ . \tag{283}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
16 Novembre 2020 – in remoto

Esercizio 1 (9 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2\theta)}{1+\sin\theta}\, d\theta\,. \tag{284}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = \sin x \left(e^{ay} + e^{-y}\right) \tag{285}$$

è la parte reale di una funzione $f(z)$ analitica in tutto $\mathbb{C}$. Trovare le funzioni $f(z)$ nei diversi casi.

Esercizio 3 (6 pt)
Si consideri la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \tag{286}$$

trovare i valori di a e b per i quali esiste la matrice inversa $\mathcal{A}^{-1}$ e calcolare, con un metodo a piacere, $\mathcal{A}^{-1}$.

Esercizio 4 (9 pt)
Si consideri l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \alpha f(x,t) - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z,t)\frac{1}{1+y^2}\delta(x-y-z)\, dy\, dz\,, \tag{287}$$

con $-\infty < x < \infty$ e condizione iniziale

$$f(x,0) = \sin x - 4\cos 3x\,, \tag{288}$$

determinare i valori di α tali che

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t) = 0\,. \tag{289}$$

Soluzione Es. 1

Si passa all'integrazione sulla circonferenza di raggio 1. Abbiamo

$$\sin^2(2\theta) = \left(\frac{z^2 - \frac{1}{z^2}}{2i}\right)^2 = -\frac{(z^4-1)^2}{4z^4}\,, \tag{290}$$

$$1 + \sin\theta = 1 + \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 + 2i\,z - 1}{2i\,z} = \frac{(z+i)^2}{2i\,z}\,, \tag{291}$$

$$d\theta = -i\frac{dz}{z}\,. \tag{292}$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2\theta)}{1+\sin\theta}\,d\theta = \int_\gamma f(z)\,dz\,, \tag{293}$$

dove $\gamma = e^{it}$, con $0 \le t \le 2\pi$ e

$$f(z) = -\frac{(z^4-1)^2}{2z^4(z+i)^2} = -\frac{(z-i)^2(z^2-1)^2}{2z^4}\,. \tag{294}$$

La $f(z)$ ha quindi un polo di ordine 4 in $z = 0$, interno alla circonferenza su cui stiamo integrando. Utilizzando il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,Res(f,0) = 4\pi\,, \tag{295}$$

poiché

$$Res(f,0) = -2i\,. \tag{296}$$

Soluzione Es. 2

Per essere la parte reale di una funzione analitica, la $u(x,y)$ deve essere armonica. Si ha

$$u_x(x,y) = \cos x\left(e^{ay} + e^{-y}\right)\,, \tag{297}$$

$$u_{xx}(x,y) = -\sin x\left(e^{ay} + e^{-y}\right)\,, \tag{298}$$

$$u_y(x,y) = \sin x\left(ae^{ay} - e^{-y}\right)\,, \tag{299}$$

$$u_{yy}(x,y) = \sin x\left(a^2e^{ay} + e^{-y}\right)\,. \tag{300}$$

Quindi

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \sin x\left(a^2 - 1\right)e^{ay} = 0\,, \tag{301}$$

ovvero

$$a = \pm 1\,. \tag{302}$$

Usando le relazioni di Cauchy-Riemann si ha

$$v_x = -u_y = -\sin x\left(ae^{ay} - e^{-y}\right) \tag{303}$$

e/o

$$v_y = u_x = \cos x \left(e^{ay} + e^{-y}\right) \ , \tag{304}$$

con $a = \pm 1$. Quindi si ha

$$v(x,y) = \cos x \left(\pm e^{\pm y} - e^{-y}\right) + c \,. \tag{305}$$

Le funzioni analitiche saranno date da

$$f(z) = \sin x \left(e^{\pm y} + e^{-y}\right) + i \cos x \left(\pm e^{\pm y} - e^{-y}\right) + k \tag{306}$$

Nel caso $a = 1$ si ha

$$f(z) = ie^{-ix}e^{y} - ie^{ix}e^{-y} + k = -i(e^{iz} - e^{-iz}) + k = 2\,\sin z + k \,. \tag{307}$$

Nel caso $a = -1$ si ha

$$f(z) = -2ie^{ix}e^{-y} + k = -2ie^{iz} + k \,. \tag{308}$$

Soluzione Es. 3

Dal calcolo degli autovalori si ha che l'inversa esiste se $a \neq 0$ a $a \neq \pm 1$.
Scrivendo $\mathcal{A}$ nella forma

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$$

con

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

utilizzando la formula

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 ...$$

e notando che $\mathcal{B}^2 = 0$ ed inoltre $\mathcal{A}_0$ commuta con $\mathcal{B}$ é immediato trovare

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}_0^{-1}\left(\mathcal{I} + \mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{B}\right)^{-1} = \mathcal{A}_0^{-1} - \mathcal{A}_0^{-2}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{b}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Alternativamente si puó usare Cayley-Hamilton. Notare che anche se $\mathcal{A}$ é nominalmente una matrice 3×3, di fatto si riconduce ad una matrice 2×2, questo semplifica (un po') i calcoli.

Soluzione Es. 4

Per prima cosa notiamo che eliminando la delta l'integrale doppio diventa un prodotto di convoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z,t) g(x-z)\, dz \ \ , \ \ g(x-z) = \frac{1}{1+(x-z)^2} \,.$$

Passando in trasformata di Fourier, usando il teorema di convoluzione si ha

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(k,t) = \alpha \hat{f}(k,t) - \sqrt{2\pi}\hat{f}(k,t)\hat{g}(k)\,,$$

con un semplice calcolo con i residui si trova

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} g(x)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|} \quad .$$

Abbiamo quindi

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(k,t) = \left(\alpha - \pi e^{-|k|}\right)\hat{f}(k,t) \quad \to \quad \hat{f}(k,t) = e^{(\alpha - \pi e^{-|k|})t}\,\hat{f}(k,0)\,,$$

per avere $\lim_{t\to\infty} f(x,t) = 0$ si deve richiedere che per tutti i k coinvolti nella condizione iniziale deve valere

$$\alpha - \pi e^{-|k|} < 0\ ,$$

nella condizione iniziale appaiono $|k| = 1$ e $|k| = 3$ quindi

$$\alpha < \pi e^{-3}\,.$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
25 Gennaio 2021 – in remoto

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(x)}{(x^2+1)} \,. \tag{309}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Determinare la regione di convergenza della serie

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{x}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k \,. \tag{310}$$

Se la funzione di variabile complessa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è determinata sul segmento $y = 0$, $1.2 < x < 1.9$ dalla condizione

$$u(x,0) = g(x)\,, \quad v(x,0) = 0\,, \tag{311}$$

calcolarne il valore in $z = i$.

Esercizio 3 (6 pt)
Si trovi la soluzione $\mathbf{x}(t)$ per $t > 0$ dell'equazioni differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \tag{312}$$

ove $\mathbf{A}$ è la matrice 3×3 i cui elementi sono $A_{ji} = 1$ er ogni (i,j) e condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (1,0,2)$.

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la $f(x)$ tale che $f(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$, che soddisfa l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) f(z) \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \delta(x-y-z-t)\, dy\, dz\, dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \;\; , \sigma \geq 1 \tag{313}$$

Soluzione Es. 1

Si può procedere come segue. Si ha

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \tag{314}$$

da cui

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) . \tag{315}$$

L'integrale diventa

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{(x^2+1)} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2+1)} . \tag{316}$$

Passando all'integrazione in $\mathbb{C}$, consideriamo:

$$J_1 = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z^2+1)}, \quad J_2 = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} \frac{e^{2iz}}{(z^2+1)}, \quad J_3 = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_3} \frac{e^{-2iz}}{(z^2+1)}, \tag{317}$$

dove $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$ e dove γ_1 è costituito dal segmento $-R < x < R$ e dalla semicirconferenza e^{it}, $0 < t < \pi$, mentre γ_3 è costituito dal segmento $-R < x < R$ e dalla semicirconferenza e^{it}, $0 < t < -\pi$ (cioè la semicirconferenza nel semipiano inferiore, percorsa in senso orario).

Siccome sulle semicirconferenze

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}\, d\theta = 0 , \tag{318}$$

e analogamente per gli altri due integrali, per i quali vale il lemma di Jordan, si ha

$$I_1 = J_1 = 2\pi i\left[\frac{1}{2}Res\left(\frac{1}{(z^2+1)}, i\right)\right] = \frac{\pi}{2}, \tag{319}$$

$$I_2 = J_2 = 2\pi i\left[\frac{1}{4}Res\left(\frac{e^{2iz}}{(z^2+1)}, i\right)\right] = \frac{\pi}{4e^2}, \tag{320}$$

$$I_3 = J_3 = -2\pi i\left[\frac{1}{4}Res\left(\frac{e^{-2iz}}{(z^2+1)}, -i\right)\right] = \frac{\pi}{4e^2}. \tag{321}$$

In totale:

$$I = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1+e^2}{e^2}\right) . \tag{322}$$

Soluzione Es. 2

La $g(x)$ è data dalla somma di due serie geometriche: una converge per $x > 1$ e la seconda per $x < 2$. Quindi la somma delle due serie converge nel segmento $1 < x < 2$.

Per passare alla continuazione analitica della $f(z)$ conviene risommare le serie per poi trovare agevolmente la funzione $f(z)$. Si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{x}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k = 2\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k \tag{323}$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{2}{1-\frac{x}{2}} + 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k, \tag{324}$$

$$= \frac{4}{(2-x)^2} + \frac{1}{1-x}. \tag{325}$$

I due punti $z = 1$ e $z = 2$ sono singolarità polari per la $f(z)$, che si può trovare come continuazione analitica in tutto $\mathbb{C} - \{1, 2\}$ dalla condizione sul segmento:

$$f(z) = \frac{4}{(2-z)^2} + \frac{1}{1-z}. \tag{326}$$

In $z = i$ abbiamo

$$f(i) = \frac{49+57i}{50}. \tag{327}$$

Soluzione Es. 3

Ovviamente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(0)$$

ove

$$\mathbf{B}(t) = e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathbf{A}^n$$

notando che la matrice $\mathbf{A}$ è proporzionale ad un proiettore, infatti

$$\mathbf{A}^2 = 3\mathbf{A},\ \mathbf{A}^3 = 3^2\mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^n = 3^{n-1}\mathbf{A} = \frac{1}{3}3^n\mathbf{A}$$

si ha facilmente

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{I} + \frac{e^{3t}-1}{3}\mathbf{A}$$

Soluzione Es. 4

Integrando su y e z si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

ove

$$G(x) = (f*f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy\,.$$

Usando il teorema di convoluzione due volte e le proprietà della trasformata di Fourier della gaussiana si ha, per $\sigma > 1$

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{2\pi a^2}}$$

ove

$$a^2 = \frac{\sigma^2 - 1}{2}$$

mentre per $\sigma = 1$

$$f(x) = \delta(x)\,.$$

Se $\sigma < 1$ non si ha soluzione.
Per chi conosce un po' di probabilità il risultato è ovvio; la somma di 3 variabile gaussiane indipendenti è una variabile gaussiana la cui varianza è la somma delle 3 varianze: $a^2 + a^2 + 1 = \sigma^2$.

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
22 Febbraio 2021 – in remoto

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\cosh(x)}\, dx\,. \tag{328}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Date le funzioni

$$f_1(z) = \sqrt{z^3}\left(1 + \frac{2}{5}z\right) e^z\,, \qquad f_2(z) = \frac{1}{z\sinh(z)}\,, \tag{329}$$

calcolare

$$I_i = \int_\gamma f_i(z)\, dz\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{330}$$

dove $\gamma = e^{it}$, $-\pi < t < \pi$, prendendo per le funzioni polidrome il ramo principale.

Esercizio 3 (6 pt)
Data l'equazioni differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x}\,, \tag{331}$$

ove $\mathcal{A}$ è la matrice 3×3

$$\mathcal{A} = -3\mathcal{P}_1 - 2\mathcal{P}_2 + e^{\mathcal{P}_1 + a\mathcal{P}_3}\,, \tag{332}$$

ove $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$ sono i proiettori sui vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$ tra loro ortogonali, e la condizione iniziale

$$\mathbf{x}(0) = b\mathbf{x}_1 + c\mathbf{x}_2 + d\mathbf{x}_3\,, \tag{333}$$

si trovino i valori reali di a, b, c e d tali che

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0\,. \tag{334}$$

Esercizio 4 (9 pt)
Si consideri l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -e^{-t}\partial_{xx} f(x,t) - t^2 e^{-t} f(x,t)\,, \tag{335}$$

con $-\infty < x < \infty$, e condizione iniziale

$$f(x,0) = \delta(x^2 - 1)\,, \tag{336}$$

si calcoli

$$K(x) = \lim_{t\to\infty} f(x,t)\,. \tag{337}$$

Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}}}{\cosh(z)}\,. \tag{338}$$

$f(z)$ ha singolarità polari dove si annulla il coseno iperbolico, quindi in

$$z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{339}$$

Si può sfruttare la periodicità dell'esponenziale integrando su un cammino rettangolare $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ formato da

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= x\,, \quad -R \le x \le R\,, && (340)\\
\gamma_2 &= R + iy\,, \quad 0 \le y \le \pi\,, && (341)\\
\gamma_3 &= -x + i\pi\,, \quad -R \le x \le R\,, && (342)\\
\gamma_4 &= -R + iy\,, \quad \pi \ge y \ge 0\,, && (343)
\end{aligned}$$

prendendo poi il limite $R \to \infty$. In questo modo si include nel cammino una sola singolarità polare, in $z = i\frac{\pi}{2}$.

Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,Res\left(f, i\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i\,\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{i} = \pi\sqrt{2}(1+i)\,. \tag{344}$$

D'altra parte abbiamo:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\cosh(x)}\,dx = I\,, \tag{345}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz &= -\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{\frac{1}{2}(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}\,dx = -\lim_{R\to\infty} e^{i\frac{\pi}{2}}\int_{-R}^{R}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{-\cosh(x)}\,dx\,,\\
&= Ie^{i\frac{\pi}{2}}\,.
\end{aligned} \tag{346}$$

Per quanto riguarda l'integrazione su γ_2 e γ_4, si ha per Darboux:

$$\left|\int_{\gamma_1} i\,dy\frac{e^{\left(\frac{R}{2}+i\frac{y}{2}\right)}}{\cosh(R+iy)}\right| \le \pi\frac{2e^{\left(\frac{R}{2}\right)}}{e^{\left(\frac{R}{2}\right)}-1}\,, \tag{347}$$

$$\left|\int_{\gamma_2} i\,dy\frac{e^{\left(-\frac{R}{2}+i\frac{y}{2}\right)}}{\cosh(-R+iy)}\right| \le \pi\frac{2e^{-\left(\frac{R}{2}\right)}}{e^{\left(\frac{R}{2}\right)}-1}\,, \tag{348}$$

e quindi entrambe sono nulle nel limite $R \to \infty$.

In totale si ha

$$I\left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \pi\sqrt{2}(1+i) \tag{349}$$

e quindi

$$I = \pi\sqrt{2}\,. \tag{350}$$

Soluzione Es. 2

- La $f_1(z)$ è una funzione polidroma. Si ha

$$z^{\frac{3}{2}} = r^{\frac{3}{2}} e^{3\left(\frac{1}{2}\theta + k\pi i\right)}, \tag{351}$$

con $k = 0, 1$. Il ramo principale si ha per $k = 0$ e $-\pi < \theta < \pi$.

Identificato il ramo principale, ovunque tranne sul taglio la funzione è analitica e si può quindi trovare la primitiva, che sarà

$$F(z) = \frac{2}{5}\sqrt{z^5}e^z \,. \tag{352}$$

L'integrale sulla curva chiusa attraverso il taglio sarà quindi dato dalla discontinuità della funzione, ovvero

$$I = \lim_{\epsilon\to 0}\left[F(i(\pi-\epsilon)) - F(-i(\pi-\epsilon))\right] = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{2}{5}\sqrt{z^5}e^z\Big|_{e^{-i(\pi-\epsilon)}}^{e^{i(\pi-\epsilon)}} = \frac{4}{5e}i \,. \tag{353}$$

- Per quanto riguarda l'integrale su γ della $f_2(z)$, la funzione ha una singolarità isolata in $z = 0$, singolarità di tipo polare. Per il teorema dei residui basta calcolarsi il residuo di $f_2(z)$ in zero, espandendola in serie di Laurent:

$$f_2(z) = \frac{1}{z\left(z + \frac{z^3}{3} + ...\right)} \simeq \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{3} + ...\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} + ... \tag{354}$$

Il residuo è nullo e quindi

$$\int_\gamma f_2(z)\, dz = 0 \,. \tag{355}$$

Soluzione Es. 3

$$e^{\mathcal{P}_1 + a\mathcal{P}_3} = \mathcal{I} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{P}_1 + a\mathcal{P}_3)^n$$

ricordando le proprietá dei proiettori abbiamo

$$e^{\mathcal{P}_1 + a\mathcal{P}_3} = \mathcal{I} + (e-1)\mathcal{P}_1 + (e^a - 1)\mathcal{P}_3 = e\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + e^a\mathcal{P}_3$$

e quindi

$$\mathcal{A} = (e-3)\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 + e^a\mathcal{P}_3$$

usando il teorema spettrale

$$e^{\mathcal{A}t} = e^{(e-3)t}\,\mathcal{P}_1 + e^{-t}\,\mathcal{P}_2 + e^{e^a t}\,\mathcal{P}_3$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathcal{A}t}\,\mathbf{x}(0) = e^{(e-3)t} b\,\mathbf{x}_1 + e^{-t} c\,\mathbf{x}_2 + e^{e^a t} d\,\mathbf{x}_3$$

poiché $e - 3 < 0$ e $e^a > 0$ per avere $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ si deve avere $d = 0$, mentre a, b e c possono avere qualunque valore.

Soluzione Es. 4

Passando in trasformata di Fourier si ha

$$\frac{d}{dt} F(k,t) = -e^{-t} k^2 F(k,t) - \, t^2 e^{-t} F(k,t)$$

cha si risolve facilmente

$$F(k,t) = e^{G(t)} e^{-k^2(1-e^{-t})} F(k,0) \;\; , \quad G(t) = -\int_0^t z^2 e^{-z} dz$$

Antistrasformando e ricordando il propagatore dell'equazione del calore si ha

$$f(x,t) = \frac{e^{G(t)}}{\sqrt{4\pi(1-e^{-t})}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4(1-e^{-t})}} f(y,0)\, dy$$

$f(y,0) = \delta(y^2 - 1) = \frac{1}{2}(\delta(y-1) + \delta(x+1))$ inoltre

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = -\int_0^\infty z^2 e^{-z}\, dz = -\Gamma(3) = -2$$

quindi

$$K(x) = \frac{1}{4e^2\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{(x-1)^2}{4}} + e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} \right)$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
29 Aprile 2021 – in remoto

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx\,. \tag{356}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Studiare il dominio di analiticità della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\log(1+z)}{\sin(z)}\,, \tag{357}$$

discutendone le varie singolarità.

Esercizio 3 (6 pt)
Data la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \tag{358}$$

calcolare la matrice inversa di $\mathcal{B} = \mathcal{A}^N$, $N = 2, 3, ..$

Esercizio 4 (9 pt)
Si trovi la soluzione dell'equazione di Laplace

$$\partial^2_{xx}u(x,y) + \partial^2_{yy}u(x,y) = 0\,, \tag{359}$$

all'interno del quadrato con vertici in $(0,0)\,,\,(\pi,0)\,,\,(\pi,\pi)$ e $(0,\pi)$, con condizioni al bordo

$$u(x,0) = \sin x - 2\sin 3x + \sin 5x\ ,\ \ u(x,\pi) = u(0,y) = u(\pi,y) = 0\,. \tag{360}$$

Soluzione Es. 1

Notiamo che la funzione è pari. Quindi consideriamo il seguente integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} dx\,. \tag{361}$$

L'integrale I è la parte immaginaria di

$$A = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} dx = J + iI\,. \tag{362}$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,. \tag{363}$$

La $f(z)$ è analitica in tutto $\mathbb{C}$ tranne nei punti in cui si annulla il denominatore

$$z = 0\,, \qquad z = \pm i\,. \tag{364}$$

Integriamo la $f(z)$ su un cammino

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_r\,, \tag{365}$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= x\,, \qquad r \le x \le R\,, & (366)\\ \gamma_2 &= x\,, \qquad -R \le x \le -r\,, & (367)\\ \gamma_R &= Re^{i\theta}\,, \qquad 0 \le \theta \le \pi\,, & (368)\\ \gamma_r &= re^{i\theta}\,, \qquad \pi \le \theta \le 0\,, & (369) \end{aligned}$$

e poi prenderemo il limite $R \to \infty$ e $r \to 0$. Per il teorema di Cauchy si ha

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i Res(f,i) = 2\pi i \lim z \to i \frac{e^{iz}}{z(z+i)} = -\frac{i\pi}{e}\,. \tag{370}$$

D'altra parte, utilizzando il lemma di Jordan e il lemma degli archi infinitesimi, si ha

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \left(\int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz \right) = A\,, \tag{371}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0\,, \tag{372}$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = -i\pi\, Res(f,0) = -i\pi\,. \tag{373}$$

In totale

$$J + iI - i\pi = -\frac{i\pi}{e}\,, \tag{374}$$

ovvero

$$J = 0\,, \tag{375}$$

$$I = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)\,. \tag{376}$$

Infine si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx = \frac{\pi(e-1)}{2e}\,. \tag{377}$$

Soluzione Es. 2

Soluzione Es. 3

La matrice $\mathcal{A}$ puo' essere scritta nella forma

$$\mathcal{A} = a\mathcal{I} + \mathbf{b}$$

ove

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

notando che $\mathbf{b}^2 = 0$ si ha

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^N = a^N\mathcal{I} + Na^{N-1}\mathbf{b} = a^N\Big(\mathcal{I} + \frac{N}{a}\mathbf{b}\Big)$$

$$\mathcal{B}^{-1} = a^{-N}\Big(\mathcal{I} + \frac{N}{a}\mathbf{b}\Big)^{-1}$$

ricordando che

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$$

ed inoltre $\mathbf{b}^2 = 0$ si ha

$$\mathcal{B}^{-1} = a^{-N}\Big(\mathcal{I} - \frac{N}{a}\mathbf{b}\Big)$$

Soluzione Es. 4

Cercando la soluzione per separazione si variabili e imponendo la condizione al bordo $u(x,0) = \sin x - 2\sin 3x + \sin 5x$ si ottiene facilmente

$$u(x,y) = (a_1e^{y} + b_1e^{-y})\sin x - 2(a_2e^{2y} + b_2e^{-2y})\sin 2x + (a_5e^{5y} + b_5e^{-5y})\sin 5x$$

questa forma soddisfa sempre le condizioni al bordo $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$, i coefficienti (a_n, b_n) si ottengono dalle condizioni al bordo sui due lati orizzontali:

$$a_n + b_n = 1 \;\;,\;\; a_ne^{n\pi} + b_ne^{-n\pi} = 0$$

si ottiene

$$a_n = \frac{-1}{e^{2n\pi}-1} \qquad b_n = \frac{e^{2n\pi}}{e^{2n\pi}-1}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
22 Giugno 2021

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo, né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (10 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2e^x + 3e^{-x}} dx \,. \tag{378}$$

Esercizio 2 (5 pt)
Sviluppare in serie di Laurent la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 5z + 4)} \tag{379}$$

nelle regioni $1 < |z| < 4$ e $|z| > 4$.

Esercizio 3 (5 pt)
Data la matrice $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 2b & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \tag{380}$$

dire per quali valori di a, b, c, d, e ed f la matrice

$$\mathcal{B} = e^{\mathcal{A}} \tag{381}$$

è unitaria.

Esercizio 4 (10 pt)
Trovare la $f(x,t)$ soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = e^{-t} \partial^2_{xx} f(x,t) - F(t) f(x,t) \tag{382}$$

con

$$F(t) = \frac{1}{t^\alpha} \Theta(t - 0.8) \delta(\sin \pi t) \tag{383}$$

ove $\Theta(z)$ indica la funzione gradino che vale 0 se $z < 0$ e vale 1 se $z > 0$, e condizione iniziale $f(x,0) = \delta(x-2)$. Determinare

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t) \tag{384}$$

per $\alpha > 0$. Lasciare indicate sommatorie il cui valore numerico non è facile da trovare.

Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z}{2e^z + 3e^{-z}} \,. \tag{385}$$

La $f(z)$ ha delle singolarità nel piano complesso, là dove si annulla il denominatore

$$2e^z + 3e^{-z} = 0 \,, \tag{386}$$

ovvero in

$$z = z_k = \frac{1}{2} \log\left(\frac{3}{2}\right) + i\frac{\pi}{2} + i\pi k \,, \tag{387}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Possiamo risolvere l'integrale reale di partenza andando a sfruttare il teorema dei residui e integrando la $f(z)$ sul seguente percorso:

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \,, \tag{388}$$

dove $\gamma_1 = x$ con $-b < x < b$, $\gamma_2 = b + iy$ con $0 < y < \pi$, $\gamma_3 = x + i\pi$ con $b > x > -b$, $\gamma_4 = -b + iy$ con $\pi > y > 0$ e poi prendendo il limite $b \to \infty$.

Si ha

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f(z), z_0) = 2\pi i \left(\frac{\pi}{4\sqrt{6}} - i\frac{1}{4\sqrt{6}} \log\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \log\left(\frac{3}{2}\right) + i\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}} \,. \tag{389}$$

Le integrazioni sui singoli cammini danno:

$$\lim_{b\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2e^x + 3e^{-x}} dx = I \,, \tag{390}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z) = \int_0^{\pi} \frac{b + iy}{2e^{b+iy} + 3e^{-b-iy}} i\, dy \to 0 \,, \tag{391}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_{\gamma_3} f(z) = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{x + i\pi}{2e^{x+i\pi} + 3e^{-x-i\pi}} dx = I + i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2e^x + 3e^{-x}} dx \,, \tag{392}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_{\gamma_4} f(z) = \int_{\pi}^{0} \frac{-b + iy}{2e^{-b+iy} + 3e^{b-iy}} i\, dy \to 0 \,. \tag{393}$$

In totale, quindi, abbiamo

$$2I + i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2e^x + 3e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \log\left(\frac{3}{2}\right) + i\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}} \,, \tag{394}$$

ovvero

$$I = \frac{\pi}{4\sqrt{6}} \log\left(\frac{3}{2}\right) \,, \tag{395}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2e^x + 3e^{-x}} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \,. \tag{396}$$

Soluzione Es. 2

Abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)} = \frac{1}{3(z-4)} - \frac{1}{3(z-1)}\,, \tag{397}$$

che è analitica in $\mathbb{C}$ escluso i punti $z = 1$ e $z = 4$. Per trovare l'espressione della $f(z)$ in serie di Laurent fra la prima e la seconda singolarità notiamo che se $1 < |z| < 4$ si può scrivere

$$\frac{1}{3(z-4)} = -\frac{1}{12(1-z/4)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} \tag{398}$$

e

$$\frac{1}{3(z-1)} = \frac{1}{3z(1-1/z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}\,, \tag{399}$$

quindi

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} = -\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}\right)\,, \tag{400}$$

dove nella prima sommatoria abbiamo riscalato l'indice di somma con $k = n + 1$.

Nella seconda regione invece si ha $|z| > 4$, per cui

$$\frac{1}{3(z-4)} = \frac{1}{3z(1-4/z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}} \tag{401}$$

mentre l'altra serie rimane la stessa in forma. Quindi

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 4^n\, z^{-n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(4^n - 1)\, z^{-n-1} \sim \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \ldots\,. \tag{402}$$

È da notare che la $f(z)$ ha uno zero doppio nel punto all'infinito e quindi la sua serie di Laurent nella regione $|z| > 4$ contiene solo la parte principale che giustamente comincia con $1/z^2$.

Soluzione Es. 3

$\mathcal{B}$ è unitaria se è della forma

$$\mathcal{B} = e^{i\mathcal{C}} \tag{403}$$

ove $\mathcal{C}$ è autoaggiunta

$$i\mathcal{C} = \mathcal{A}\ \ ,\ \ \mathcal{C} = -i\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -ia & -ib & 0 \\ -2ib & -ic & -id \\ 0 & -ie & -if \end{pmatrix} \tag{404}$$

quindi si deve avere a, c, f immaginari, $b = 0$, $d = e$ immaginari.

Soluzione Es. 4

Passando in trasformata di Fuorier si ha

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(k,t) = \Big(- k^2 e^{-t} - F(t) \Big) \hat{f}(k,t) \tag{405}$$

che si risolve facilmente:

$$\hat{f}(k,t) = e^{-H(t)} e^{-G(t)k^2} \hat{f}(k,0) \tag{406}$$

ove

$$G(t) = \int_0^t e^{-t'}\, dt' = 1 - e^{-t} \ \ , \ \ H(t) = \int_0^t F(t')\, dt' \tag{407}$$

ricordando le proprieta' della $\Theta(\,)$ e della delta di Dirac, si ha $H(t) = 0$ per $t < 1$, mentre per $t > 1$ si ha

$$F(t) = \frac{1}{\pi t^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-n) \ \ , \ \ H(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \frac{1}{\pi n^\alpha} \tag{408}$$

ove $N(t)$ e' la parte intera di t: cioe' 1 se $1 < t < 2$; 2 se $2 < t < 3$ etc.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} f(x,t) &= e^{-H(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-G(t)k^2} \hat{f}(k,0) e^{ikx}\, dk\,, & (409) \\ &= e^{-H(t)} \frac{1}{2\pi} \int \int e^{-G(t)k^2} f(x',0) e^{ik(x-x')}\, dk\, dx'\,. & (410) \end{aligned}$$

Usando la $f(x',0)$, con calcoli standard (trasformata di Fuorier della Gaussiana) si ottiene

$$f(x,t) = e^{-H(t)} \frac{1}{\sqrt{4\pi G(t)}} e^{-\frac{(x-2)^2}{4G(t)}} \tag{411}$$

Notando che

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} G(t) = 1\,, & (412) \\ &\lim_{t\to\infty} H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^\alpha} = C(\alpha) < \infty \ \ \textit{solo se} \ \ \alpha > 1\,, & (413) \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} f(x,t) = 0 \ \ \textit{se} \ \ \alpha \leq 1\,, & (414) \\ &\lim_{t\to\infty} f(x,t) = e^{-C(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{4}} \ \ \textit{se} \ \ \alpha > 1\,. & (415) \end{aligned}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
6 Luglio 2021

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1} dx \,, \tag{416}$$

considerando per le funzioni polidrome il ramo principale.

Esercizio 2 (6 pt)
Discutere il dominio di analiticità della funzione

$$L(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt}\, dt \,, \tag{417}$$

e trovarne il prolungamento analitico.

Esercizio 3 (7 pt)
Data la l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathcal{A}\,\mathbf{x} \tag{418}$$

ove $\mathbf{x} \in R^4$ e

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{419}$$

1) scrivere $\mathbf{x}(t)$ in funzione di $\mathbf{x}(0)$
2) sia $\mathbf{x}(0) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ la condizione iniziale, determinare per quali valori di x_1, x_2, x_3 e x_4 si ha

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0 \,. \tag{420}$$

Suggerimento: $0 = 1 - 1$.

Esercizio 4 (8 pt)
Data la funzione

$$P(x) = \Theta(x)\, e^{-x} \tag{421}$$

ove $\Theta(x)$ indica la funzione gradino che vale 0 se $x < 0$ e vale 1 se $x > 0$, calcolare

$$f(x) = \int\int P(x_1)P(x_2)\delta(x - x_1 - x_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{422}$$

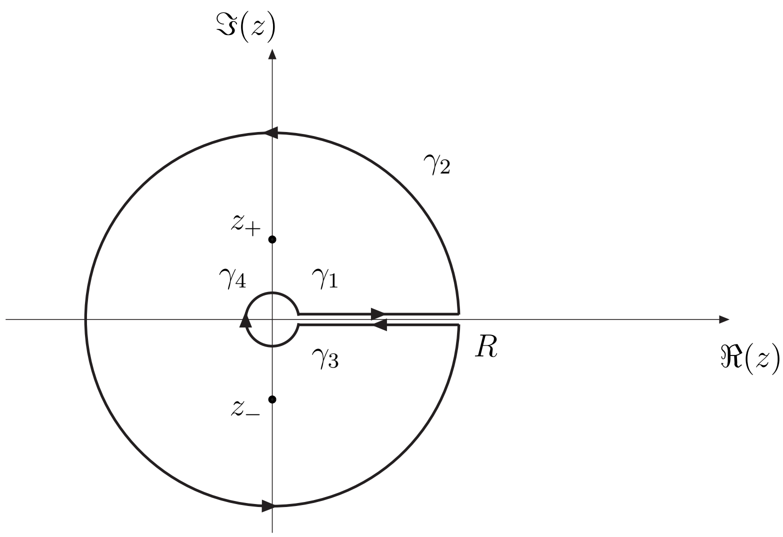
Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2+1}\,, \tag{423}$$

che è polidroma. Prendiamo il taglio lungo il semiasse reale positivo. Inoltre, la $f(z)$ ha due poli semplici in $z_\pm = \pm i$.

Scegliamo il seguente cammino d'intgegrazione[1]:



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,dz &= 2\pi i\left\{\mathrm{Res}(f,z_+)+\mathrm{Res}(f,z_+)\right\}\,, &(424)\\
&= 2\pi i\left\{-\frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}+\frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right\}\,, &(425)\\
&= \pi\,e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\,. &(426)
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty,r\to0}\int_{\gamma_1} f(z) &= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}dx\,, &(427)\\
\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{R^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}}}{R^2e^{i2\theta}+1}\,iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,, &(428)\\
\lim_{R\to\infty,r\to0}\int_{\gamma_3} f(z) &= \int_\infty^0\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}\right)dx = -e^{\frac{2\pi}{3}i}\int_0^\infty\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}dx\,, &(429)
\end{aligned}$$

[1] Si potrebbe scegliere anche una semicirconferenza sul semipiano superiore, $Re^{i\theta}$ con $0<\theta<\pi$, chiusa da un segmento sull'asse reale con $-R<x<R$. Infatti nel denominatore di $f(z)$ c'è uno z^2 che rimane sé stesso anche se $z\to ze^{i\pi}$.

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_4} f(z) \quad = \quad -\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{r^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}}{r^2 e^{i2\theta}+1}\, i r e^{i\theta}\, d\theta = 0\,. \tag{430}$$

In totale si trova

$$I\left(1-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \pi\, e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\,, \tag{431}$$

ovvero

$$I = \frac{\pi\, e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{\left(1-e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)} = \frac{\pi\, e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)} = \pi\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,. \tag{432}$$

Soluzione Es. 2

La funzione

$$f(z,t) = t^3 e^{-zt} \tag{433}$$

è integrabile in t purché $\Re(z) > 0$. Infatti in $t = 0$ non ci sono problemi (la funzione va rapidamente a zero); in $t \to \infty$ l'integrale converge solo se l'esponenziale va a zero e questo succede se $\Re(z) > 0$. Da notare che deve essere $\Re(z) \neq 0$ (cioè $\Re(z)$ è strettamente > 0); infatti in $\Re(z) = 0$ l'integrale non converge. Nel dominio di convergenza dell'integrale, si ha

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) L(z) = 0\,, \tag{434}$$

come si può verificare per calcolo diretto. Quindi la $L(z)$ definita tramite la rappresentazione integrale è analitica nel semipiano $\Re(z) > 0$.

La continuazione analitica a tutto il piano complesso si ottiene calcolando l'integrale (per parti) nella regione di convergenza e trovando quindi un'espressione in forma chiusa per la $L(z)$:

$$\begin{aligned}
L(z) \quad &= \quad \int_0^\infty t^3 e^{-zt}\, dt = -\frac{t^3}{z} e^{-zt}\Big|_0^\infty + 3\int_0^\infty \frac{t^2}{z} e^{-zt}\, dt = 3\int_0^\infty \frac{t^2}{z} e^{-zt}\, dt \\
&= \quad -3\frac{t^2}{z^2} e^{-zt}\Big|_0^\infty + 6\int_0^\infty \frac{t}{z^2} e^{-zt}\, dt = 6\int_0^\infty \frac{t}{z^2} e^{-zt}\, dt \\
&= \quad -6\frac{t}{z^3} e^{-zt}\Big|_0^\infty + \frac{6}{z^3}\int_0^\infty e^{-zt}\, dt = \frac{6}{z^4}\,.
\end{aligned} \tag{435}$$

Questa forma della $L(z)$ coincide con la rappresentazione integrale in $\Re(z) > 0$, ma è analitica in tutto $\mathbb{C}$ tranne in $z = 0$, dove ha un polo del quarto ordine. Costituisce quindi la continuazione analitica della $L(z)$ a tutto $\mathbb{C}$.

Soluzione Es. 3

Notare che

$$\mathcal{A} = 4\mathcal{P}_1 - \mathcal{I}$$

ove $\mathcal{I}$ e' la matrice identita' e

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e' il proiettore sul vettore $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$.
Ricordando le proprieta' dei proiettori

$$\mathcal{I} = \sum_{n=1}^{4} \mathcal{P}_n$$

si ha

$$\mathcal{A} = 3\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4$$

ove $\mathcal{P}_n$ e' il proiettore sul vettore $\mathbf{v}_n$ autovettore di $\mathcal{A}$. Usando il teorema spettrale si ha

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{3t}\mathcal{P}_1 + e^{-t}\mathcal{P}_2 + e^{-t}\mathcal{P}_3 + e^{-t}\mathcal{P}_4 = \left(e^{3t} - e^{-t}\right)\mathcal{P}_1 + e^{-t}\mathcal{I}\,.$$

Lo stesso risultato si puo' ottenere notando che $\mathcal{P}_1$ commuta con $\mathcal{I}$ quindi

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{-t}e^{4t\mathcal{P}_1}$$

ricordando che $\mathcal{P}_1^n = \mathcal{P}_1$ per $n = 2, 3, ...$ si ottiene facilmente

$$e^{4t\mathcal{P}_1} = \mathcal{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n t^n}{n!}\mathcal{P}_1 = \mathcal{I} + \left(e^{4t} - 1\right)\mathcal{P}_1\,.$$

Si ha quindi

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathcal{A}}\,\mathbf{x}(0)\,.$$

Affinche' $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ il vettore $\mathbf{x}(0)$ deve essere ortogonale a $\mathbf{v}_1$ quindi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\,.$$

Soluzione Es. 4

E' immediato scrivere $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \int P(x_1)P(x - x_1)\,dx_1$$

passando in trasformata di Fourier e ricordando le proprieta' della convoluzione si ha

$$\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}\left(\hat{P}(k)\right)^2$$

ove

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx}\, dx \ , \ \hat{P}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int P(x) e^{-ikx}\, dx \, .$$

Il calcolo di $\hat{P}(k)$ e' elementare:

$$\hat{P}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ik+1)} \ ,$$

si ha quindi

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{1}{ik+1} \Big)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ikx}}{(ik+1)^2}\, dk$$

l'integrale e' facile basta usare la formula di Cauchy:

$$f(x) = \Theta(x)\, x\, e^{-x} \, .$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
9 Settembre 2021

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^{-x}+e^{x}} dx \,. \tag{436}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Discutere le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^3}, \tag{437}$$

e calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{\gamma} f(z)\, dz \,, \tag{438}$$

dove $\gamma = -1 + e^{i\theta}$ con $0 \le \theta < 2\pi$.

Esercizio 3 (6 pt)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\mathcal{A}\mathbf{x} \;\;,\;\; \mathbf{x} \in R^2 \tag{439}$$

ove

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \tag{440}$$

a) trovare la soluzione $\mathbf{x}(t)$ in funzione delle condizioni iniziali se $0 < a < 1$,
b) discutere quando e' possibile avere soluzioni limitate nel caso $a > 1$.

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la $f(x)$ tale che $f(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$, che soddisfa l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_1(z) g_1(t) \delta(x-y-z-t)\, dy\, dz\, dt = g_2(x) \tag{441}$$

ove

$$g_1(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \;\;,\;\; g_2(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \;\;,\;\; \sigma^2 \le 1/2 \tag{442}$$

Soluzione Es. 1

L'integrale è la parte reale di

$$I = \Re I' = \Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{e^{-x} + e^{x}} dx \,. \tag{443}$$

Per calcolare I' consideriamo

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^{-z} + e^{z}} \,, \tag{444}$$

funzione analitica in $\mathbb{C}$ tranne nei punti in cui si annulla il denominatore

$$e^{-z} + e^{z} = 0 \,, \tag{445}$$

ovvero

$$z = i\frac{\pi}{2} + k\pi i \,, \tag{446}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Consideriamo il cammino $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ come segue

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= x \,, \qquad -R \leq x \leq R \,, & (447)\\
\gamma_2 &= R + iy \,, \qquad 0 \leq y \leq \pi \,, & (448)\\
\gamma_3 &= x + i\pi \,, \qquad R \geq x \geq -R \,, & (449)\\
\gamma_4 &= -R + iy \,, \qquad \pi \geq y \geq 0 \,. & (450)
\end{aligned}$$

La funzione $f(z)$ ha una singolarità polare in $z = z_0 = i\frac{\pi}{2}$, interna al cammino γ, quindi per il teorema dei residui abbiamo

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_0) = 2\pi i \,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2i} = \pi e^{-\frac{\pi}{2}} \,. \tag{451}$$

Inoltre

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \,, \tag{452}$$

dove

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\, dz &= I' & (453)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\, dz &= \int_0^\pi \frac{e^{iR-y}}{e^{-R-iy} + e^{R+iy}}\, i\, dy \to 0 & (454)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} f(z)\, dz &= e^{-\pi} \int_R^{-R} \frac{e^{ix}}{e^{-x-i\pi} + e^{x+i\pi}} dx = e^{-\pi} I' & (455)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\, dz &= \int_\pi^0 \frac{e^{-iR-y}}{e^{-R+iy} + e^{R-iy}}\, i\, dy \to 0 \,. & (456)
\end{aligned}$$

In totale si ha

$$(1+e^{-\pi})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{e^{-x}+e^{x}}dx=\pi e^{-\frac{\pi}{2}} \tag{457}$$

e prendendone la parte reale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{e^{-x}+e^{x}}dx=\frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{(1+e^{-\pi})}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}\,. \tag{458}$$

Soluzione Es. 2

la $f(z)$ è analitica tranne nei punti in cui si annulla il denominatore

$$z=-1\,, \tag{459}$$

dove ha un polo del terzo ordine. Il punto all'infinito è invece un punto regolare per $f(z)$ come si vede studiando in $\omega=1/z=0$ la funzione

$$f(\omega)=\frac{\omega^3\cos\left(\frac{\pi}{\omega}\right)}{(\omega+1)^3}\,. \tag{460}$$

Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\gamma}f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f,-1)=2\pi i\,\frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{dz^2}\left(f(z)(z+1)^3\right)\Big|_{z=-1}=2\pi i\,\frac{1}{2}\pi^2=\pi^3 i\,. \tag{461}$$

Soluzione Es. 3

La matrice $\mathcal{A}$ ha autovalori ed autovettori:

$$\lambda_1=1+a\ ,\ \mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad ,\ \lambda_2=1-a\ ,\ \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\ .$$

Possiamo scrivere

$$\mathbf{x}(t)=a_1(t)\mathbf{v}_1+a_2(t)\mathbf{v}_2$$

e' immediato vedere che i coefficienti $a_1(t)$ ed $a_1(t)$ soddisfano le equazioni

$$\frac{d^2a_n}{dt^2}=-\lambda_n a_n\ ,$$

nel caso $0<a<1$, $\lambda_1>0, \lambda_2>0$ si hanno le equazioni per oscillatori armonici indipendenti:

$$\frac{d^2a_n}{dt^2}=-\omega_n^2 a_n\ ,\ \omega_n=\sqrt{\lambda_n}$$

che sono facilmente risolvibili in termini di funzioni trigonometriche etc etc
Se $a>1$ allora $\lambda_2<0$ quindi per a_2 non si hanno piu' soluzioni trigonometriche ma

$$a_2(t)=Ae^{+\sqrt{a-1}\,t}+Be^{-\sqrt{a-1}\,t}$$

quindi si hanno soluzioni limitate solo per particolari condizioni iniziali corrispondenti a $A = 0$.

Soluzione Es. 4

Indicando con G la convoluzione di g_1 con se stessa, si ha

$$\int f(y)G(x-y)dy = g_2(x) \ ,$$

passando in trasformata di Fourier ed usando il teorema di convoluzione

$$G(x-y) = \frac{e^{-\frac{(x-y-2m)^2}{4\sigma^2}}}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} \ .$$

Utilizzando ancora il teorema di convoluzione si ha

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-M)^2}{2\Sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} \ \ con \ \ M = -2m \ , \ \Sigma^2 = 1 - 2\sigma^2 \ se \ \sigma^2 < 1/2$$

mentre se $\sigma^2 = 1/2$ si ha

$$f(x) = \delta(x - M) \ .$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
15 Novembre 2021

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (8 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos\theta} d\theta \,. \tag{462}$$

Esercizio 2 (7 pt)
Discutere le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}\,, \tag{463}$$

e svilupparla in serie di potenze in $z_0 = 0$, nelle varie regioni del piano complesso.

Esercizio 3 (6 pt)
Si consideri la seguente regola ricorsiva

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{3}y_n\,, \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{2}y_n\,, \tag{464}$$

con $x_0 = 0.5$ e $y_0 = 0.5$. Si calcoli x_N con $N = 10^5$.

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) + g(x) \tag{465}$$

ove $0 \leq x < 2\pi$ con $f(x,t)$ periodica e derivabile con derivata continua,

$$g(x) = \cos 4x + 2\sin 5x \;\;,\;\; f(x,0) = \sin x - 3\sin 3x + \cos x + 5\cos 3x\,. \tag{466}$$

Soluzione Es. 1

Passiamo alla variabile complessa z sulla circonferenza unitaria:

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta}\,, && (467)\\ d\theta &= -i\frac{dz}{z}\,, && (468)\\ \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\,, && (469)\\ \cos(3\theta) &= \frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2} = \frac{z^3}{2}+\frac{1}{2z^3}\,, && (470)\\ & && (471) \end{aligned}$$

con le quali l'integrale diventa

$$I = -i\int_\gamma \left(\frac{z^3}{2}+\frac{1}{2z^3}\right)\frac{dz}{z\left[5-4\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)\right]} = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{z^6+1}{z^3(2z^2-5z+2)}dz\,, \tag{472}$$

dove γ è la circonferenza unitaria. Il denominatore dell'integrando si annulla in $z=0$ (polo triplo) e in

$$2z^2-5z+2=0\,, \tag{473}$$

ovvero $z=2$ e $z=\frac{1}{2}$.

Per il teorema dei residui si ha

$$I = 2\pi i \sum_{z_0=0,\frac{1}{2}} Res(f(z),z_0)\,, \tag{474}$$

dove

$$f(z) = \frac{i}{2}\frac{z^6+1}{2z^3(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,. \tag{475}$$

Si ha

$$\begin{aligned} Res(f(z),0) &= \frac{21}{16}i\,, && (476)\\ Res(f(z),1/2) &= -\frac{65}{48}i\,. && (477) \end{aligned}$$

Quindi

$$I = 2\pi i\left(\frac{21}{16}i-\frac{65}{48}i\right) = \frac{\pi}{12}\,. \tag{478}$$

Soluzione Es. 2

Abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}\,. \tag{479}$$

Quindi, la $f(z)$ ha due singolarità polari in $z = 2$ e $z = 3$ (poli singoli). Nel punto all'infinito invece la $f(z)$ è regolare. Infatti ponendo $z \to \frac{1}{\zeta}$ si ha

$$f(\zeta) = \frac{\zeta^2}{(1-2\zeta)(1-3\zeta)}\,, \tag{480}$$

che ha uno zero doppio per $\zeta \to 0$.

Per $|z| < 2$ la funzione $f(z)$ è analitica e può essere sviluppata in serie di Taylor in $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{(z-2)} = -\frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} + \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\,. \tag{481}$$

Nella regione $2 < |z| < 3$ abbiamo un'espansione di Laurent:

$$f(z) = -\frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{(n+1)}} \tag{482}$$

Nella regione $|z| > 3$ si ha:

$$f(z) = \frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3^n-2^n)}{z^{(n+1)}}\,. \tag{483}$$

Soluzione Es. 3

È immediato vedere che per la somma $S_n = x_n + y_n$ si ha

$$S_{n+1} = \frac{5}{6}S_n\,. \tag{484}$$

Quindi

$$S_N = \left(\frac{5}{6}\right)^N S_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^N. \tag{485}$$

Poiché $x_0 = y_0$, è facile vedere che $x_n = y_n$ e quindi

$$x_N = \left(\frac{5}{6}\right)^N x_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^N \frac{1}{2}\,. \tag{486}$$

Alternativamente si può studiare il problema nella forma

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathcal{A}\mathbf{v}_n\ ,\ \mathbf{v} = (x,y)\ ,\ A_{11} = A_{22} = \frac{1}{2}\ ,\ A_{12} = A_{21} = \frac{1}{3}\,, \tag{487}$$

trovare autovalori ed autovettori di $\mathcal{A}$ etc etc ...

Soluzione Es. 4

Sviluppiamo $f(x,t)$ in serie di Fourier

$$f(x,t) = \sum_{n=1} \Big(a_n(t) \cos nx + b_n(t) \sin nx \Big) \,, \tag{488}$$

si ha

$$\frac{d}{dt} a_n = -n^2 a_n + \delta_{n4} \,, \quad \frac{d}{dt} b_n = -n^2 b_n + 2\delta_{n5} \,. \tag{489}$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali si capisce che basta considerare solo $n = 1$, $n = 3$, $n = 4$ ed $n = 5$:

$$\begin{aligned} & a_1(t) = a_1(0)e^{-t} \,,\ a_3(t) = a_3(0)e^{-9t} \,,\ b_1(t) = b_1(0)e^{-t} \,,\ b_3(t) = b_3(0)e^{-9t} \,, \\ & b_5(t) = 2\frac{1 - e^{-25t}}{25} \,,\ a_4 = \frac{1 - e^{-16t}}{16} \,. \end{aligned} \tag{490}$$

Quindi

$$f(x,t) = e^{-t} \sin x - 3e^{-9t} \sin 3x + e^{-t} \cos x + 5e^{-9t} \cos 3x + \frac{1 - e^{-16t}}{16} \cos 4x + 2\frac{1 - e^{-25t}}{25} \sin 5x \,. \tag{491}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
17 Gennaio 2022

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (8 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 2ix - 2} dx \,. \tag{492}$$

Esercizio 2 (7 pt)
Discutere le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{z-1} \,, \tag{493}$$

calcolare

$$\int_\gamma f(z)\, dz \,, \tag{494}$$

con $\gamma = 1 + e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$, e sviluppare $f(z)$ in serie di Laurent in $z = 1$.

Esercizio 3 (7 pt)
Data la regola di ricorrenza

$$x_{t+1} = a x_t + y_t \ \ , \ \ y_{t+1} = \frac{1}{2} y_t + 1 \,, \tag{495}$$

ove $|a| < 1$, $(x_0, y_0) = (1, 4)$ calcolare

$$\lim_{t\to\infty} x_t \,. \tag{496}$$

Esercizio 4 (8 pt)
Si consideri l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -e^{-t} \partial_x f(x,t) + 2e^{-x^2} \delta(t^2 + 2t) \,, \tag{497}$$

con x sulla retta e condizione iniziale

$$f(x, t = -0.5) = 0 \,. \tag{498}$$

Calcolare

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t) \,. \tag{499}$$

Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 2iz - 2} = \frac{e^{iz}}{[z-(i-1)][z-(i+1)]}\,, \tag{500}$$

che è analitica tranne in

$$z = z_\pm = \pm 1 + i\,. \tag{501}$$

Consideriamo l'integrale

$$\int_\gamma f(z)\,dz\,, \tag{502}$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2\,, && (503)\\ \gamma_1 &= x\,, \qquad -R \le x \le R\,, && (504)\\ \gamma_2 &= Re^{i\theta}\,, \qquad 0 \le \theta \le \pi\,. && (505) \end{aligned}$$

Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\left[\mathrm{Res}\,(f, z_+) + \mathrm{Res}\,(f, z_-)\right]\,, \tag{506}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(f, z_+) &= -\frac{e^{-i}}{2e}\,, && (507)\\ \mathrm{Res}\,(f, z_-) &= \frac{e^{i}}{2e}\,. && (508) \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\lim_{R\to\infty}\int_\gamma f(z)\,dz = I + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,. \tag{509}$$

Per il lemma di Jordan si ha

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0\,. \tag{510}$$

In totale, quindi, si ha

$$I = 2\pi i\left(-\frac{e^{-i}}{2e} + \frac{e^{i}}{2e}\right) = -\frac{2\pi}{e}\left(\frac{e^{i} - e^{-i}}{2i}\right) = -\frac{2\pi}{e}\sin(1)\,. \tag{511}$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ è analitica tranne che in $z = 1$ e nel punto all'infinito. In $z = 1$ ha un polo singolo. Il punto all'infinito è un punto di non analiticità, come si vede studiando la funzione

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{\omega \sin\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}{1-\omega} \tag{512}$$

nel limite di piccolo ω.

Lo sviluppo di Laurent di $f(z)$ in $z = 1$ si può ottenere come segue. Facciamo un cambio di variabile

$$z - 1 = \xi\,, \tag{513}$$

con cui si riesprime la $f(z)$ come

$$f(\xi) = \frac{1}{\xi}\sin\left(\frac{\pi}{2}(\xi+1)\right) = \frac{1}{\xi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right). \tag{514}$$

Quindi

$$f(\xi) = \frac{1}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\frac{\xi^{2k}}{(2k)!}\,, \tag{515}$$

ovvero

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi^{2k}}{2^{2k}(2k)!}\right)(z-1)^{2k-1} \sim \frac{1}{z-1} - \frac{\pi^2}{8}(z-1) + ... \tag{516}$$

Per il teorema di Cauchy si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f,1) = 2\pi i\,. \tag{517}$$

Soluzione Es. 3

Notare che il punto fisso della regola ricorsiva e'

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{2}{1-a}, 2\right)$$

scrivendo $x = u - x^*$, $y = v - y^*$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \ ,\ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Notando che

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}\,, \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\,, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

poiché $\mathcal{B}^n = 0$ se $n \geq 2$ si ha

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{A}_0^n + n\mathcal{A}_0^{n-1}\mathcal{B}$$

ricordando che $|a| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}^n = 0\,,$$

$$\lim_{t\to\infty} u_t = \lim_{t\to\infty} v_t = 0$$

e quindi

$$\lim_{t\to\infty} x_t = \frac{2}{1-a}\,.$$

Alternativamente possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \mathcal{A}^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{t-1} \mathcal{A}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

utilizzando la struttura della matrice $\mathcal{A}^n$ e' facile arrivare a lo stesso risultato.
Ancora piu' semplice: iterando l'equazione per la y_t si ha

$$y_t = 2^{-t} y_0 + 2^{-t+1} + 2^{-t+2} + ... + 2^{-2} + 2^{-1} + 1$$

etc etc

Soluzione Es. 4

Nell'intervallo $t \in (-0.5, -\epsilon)$ si ha $f(x,t) = 0$, usando le proprieta' della delta di Dirac al tempo $t = \epsilon$ si ha

$$f(x, \epsilon) = e^{-x^2} \, .$$

Per $t > 0$ il problema si riduce all'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -e^{-t} \partial_x f(x,t)$$

e condizione iniziale

$$f(x, 0) = g(x) = e^{-x^2} \, .$$

Usando la trasformata di Fourier si ottiene

$$\frac{d}{dt} \hat{f}_k(t) = -ike^{-t} \hat{f}_k(t) \ , \ \hat{f}_k(t) = e^{ik(-1+e^{-t})} \hat{f}_k(0)$$

ricordando le proprieta' delle trasformate delle trasformate di Fourier si ha

$$f(x,t) = g(x - 1 + e^{-t}) = e^{-(x-1+e^{-t})^2}$$

quindi

$$\lim_{t \to \infty} f(x,t) = e^{-(x-1)^2}$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
9 Febbraio 2022

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (8 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+4)}\,. \tag{518}$$

Esercizio 2 (7 pt)
La funzione analitica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sul segmento dell'asse reale $4 \le x \le 5$ vale

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x}{6}\right)^n - \sum_{n=0}^\infty (n+1)\frac{3^{n+1}}{x^{n+2}}\,, \qquad v(x,0) = 0\,. \tag{519}$$

Calcolare la funzione $f(z)$ in $z = 1+i$.

Esercizio 3 (7 pt)
Data l'equazioni differenziale

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{x} \in R^5 \tag{520}$$

ove

$$A_{ij} = 1 - 3\delta_{ij} \tag{521}$$

a) calcolare $\mathbf{x}(t)$ dato $\mathbf{x}(0)$
b) determinare la condizione che deve soddisfare $\mathbf{x}(0)$ in modo tale che

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$$

Esercizio 4 (8 pt)
Si consideri l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) - \partial_x f(x,t) - f(x,t) + \delta(x)\delta(t) \tag{522}$$

con x sulla retta e condizione iniziale

$$f(x, t = -0.5) = 0 \tag{523}$$

calcolare $f(x,t)$.

Soluzione Es. 1

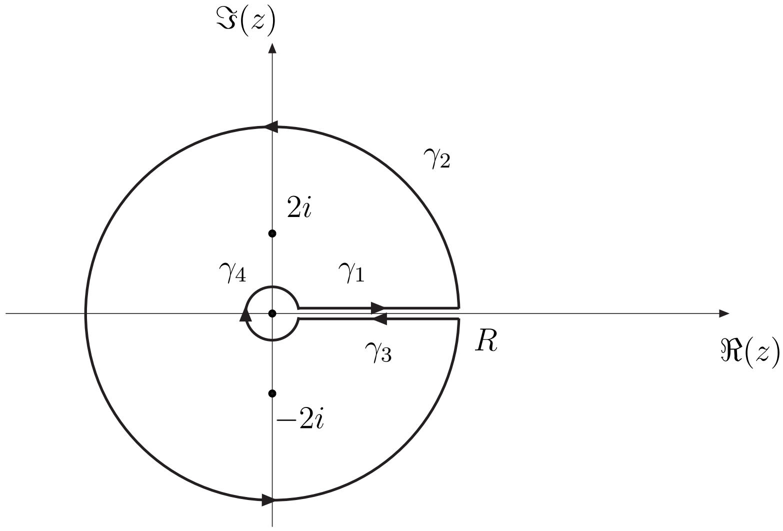
Per fare l'integrale I consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z^2+4)} \,. \tag{524}$$

$f(z)$ ha un taglio che parte da $z = 0$, dovuto alla radice, e due poli semplici in

$$z = \pm 2i \,. \tag{525}$$

Poniamo il taglio della radice sul cammino d'integrazione e consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \, [\mathrm{Res}\,(f, -2i) + \mathrm{Res}\,(f, 2i)] \,, \tag{526}$$

dove

$$\mathrm{Res}\,(f, -2i) = -\frac{1}{\sqrt{-2i}4i} = \frac{i}{4\sqrt{2}} e^{-i\frac{3}{4}\pi} \,, \tag{527}$$

$$\mathrm{Res}\,(f, 2i) = \frac{1}{\sqrt{2i}4i} = -\frac{i}{4\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \,. \tag{528}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_{\gamma_1} f(z) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+4)} dx \,, \tag{529}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z) = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{R}(R^2 e^{i2\theta}+4} \, iRe^{i\theta} \, d\theta = 0 \,, \tag{530}$$

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_{\gamma_3} f(z) = \int_{\infty}^{0}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}(x^2+4)}\right) dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x^2+4)}dx\,, \tag{531}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_4} f(z) = \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{r}(r^2e^{i2\theta}+4)}\, ire^{i\theta}\, d\theta = 0\,. \tag{532}$$

In totale quindi si ha

$$2\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x^2+4)}dx = 2\pi i\,\left[\frac{i}{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{3}{4}\pi} - \frac{i}{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2} \tag{533}$$

e quindi

$$I = \frac{\pi}{4}\,. \tag{534}$$

Soluzione Es. 2

Sul segmento $3 < x < 6$ la somma delle due serie è uniformemente convergente e trattandosi di serie geometriche si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n = \frac{6}{6-x}\,, \tag{535}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{3^{n+1}}{x^{n+2}} &= \sum_{k=1}^{\infty}k\frac{3^k}{x^{k+1}} = -\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{3}{x}\right)^{k-1}\left(-\frac{3}{x^2}\right)\,,\\ &= -\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^k = -\frac{d}{dx}\frac{x}{x-3} = \frac{3}{(x-3)^2}\,.\end{aligned} \tag{536}$$

Quindi

$$u(x,y) = \frac{6}{6-x} - \frac{3}{(x-3)^2} = \frac{6x^2-33x+36}{(x-3)^2(6-x)}\,. \tag{537}$$

La funzione che sui reali si riduce a $u(x,y)$ con $v(x,y)=0$ è

$$f(z) = \frac{6z^2-33z+36}{(z-3)^2(6-z)}\,, \tag{538}$$

continuazione analitica della $f(x) = u(x,y)$ all'intero piano complesso. Si ha

$$f(1+i) = \frac{258-81i}{325}\,. \tag{539}$$

Soluzione Es. 3

Possiamo scrivere

$$\mathcal{A} = 5\mathcal{P}_{\mathcal{I}} - 3\mathcal{I}$$

ove $\mathcal{I}$ e' la matrice identita' e $\mathcal{P}_1$ ha tutti gli elementi $1/5$ ed e' il proiettore sul vettore $\mathbf{v}^{(1)}$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \Big(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)$$

.
Usando la proprieta'

$$\mathcal{I} = \sum_{n=1}^{5} \mathcal{P}_n$$

ove $\mathcal{P}_n$ sono proiettori su vettori tra loro ortogonali, abbiamo

$$\mathcal{A} = 2\mathcal{P}_1 - 3\mathcal{P}_2 - 3\mathcal{P}_3 - 3\mathcal{P}_4 - 3\mathcal{P}_5 \,.$$

Dal teorema spettrale si ha

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{2t}\mathcal{P}_1 + e^{-3t}\mathcal{P}_2 + e^{-3t}\mathcal{P}_3 + e^{-3t}\mathcal{P}_4 + e^{-3t}\mathcal{P}_5 = \left(e^{2t} - e^{-3t}\right)\mathcal{P}_1 + e^{-3t}\mathcal{I} \,,$$

si ottiene lo stesso risultato anche notando che

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{-3t}\, e^{5t\mathcal{P}_1} \quad , \quad e^{5t\mathcal{P}_1} = \mathcal{I} + \mathcal{P}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5t)^n}{n!} = \mathcal{I} + (e^{5t} - 1)\mathcal{P}_1$$

si ha quindi

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathcal{A}}\mathbf{x}(0) \,.$$

Per avere $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ il vettore $\mathbf{x}(0)$ deve essere perpendicolare a $\mathbf{v}^{(1)}$, in pratica

$$(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}^{(1)}) = \sum_{n=1}^{5} x_n(0) v_n^{(1)} = 0 \,,$$

quindi la condizione iniziale deve soddisfare

$$\sum_{n=1}^{5} x_n(0) = 0 \,.$$

Soluzione Es. 4

Nell'intervallo $t \in (-0.5, -\epsilon)$ si ha $f(x,t) = 0$, usando le proprieta' della delta di Dirac al tempo $t = \epsilon$ si ha

$$f(x, \epsilon) = \delta(x) \,.$$

Per $t > 0$ il problema si riduce all'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) - \partial_x f(x,t) - f(x,t)$$

e condizione iniziale

$$f(x, 0) = \delta(x) \;.$$

Usando la trasformata di Fourier si ottiene

$$\frac{d}{dt}\hat{f}_k(t) = (-k^2 - ik - 1)\hat{f}_k(t) \;,\; \hat{f}_k(t) = e^{(-k^2 - ik - 1)t}\hat{f}_k(0)$$

ricordando la trasformata di Fourier della gaussiana, della delta di Dirac e le proprieta' delle trasformate delle trasformate di Fourier si ottiene

$$f(x,t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-t)^2}{4t}} \,.$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
4 Maggio 2022

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2(x^2-1)} \,. \tag{540}$$

Esercizio 2 (6 pt)
La funzione $\mathrm{Li}_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, è data dalla seguente rappresentazione integrale

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^1 \frac{dt}{t} \log(1-tz) \,. \tag{541}$$

Discuterne il dominio di analiticità. Trovare un'espressione per $\mathrm{Li}_2(z)$ in serie di potenze centrata in $z=0$ e discuterne il raggio di convergenza.

Esercizio 3 (6 pt)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x} \,, \tag{542}$$

ove $\mathcal{A}$ è la matrice 4×4

$$\mathcal{A} = a\mathcal{P}_1 + b\mathcal{P}_3 + e^{(\mathcal{P}_1+2\mathcal{P}_4)^3} \tag{543}$$

e $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$ sono i proiettori sui vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ tra loro ortogonali, e la condizione iniziale

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{n=1}^{4} c_n \mathbf{x}_n \,, \tag{544}$$

si trovino i valori reali di a, b, c_1, c_2, c_3 e c_4 tali che

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0 \,. \tag{545}$$

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f = \frac{1}{4b}\Big(\theta(x+b) - \theta(x-b)\Big) \tag{546}$$

nel limite $b \to 0$ ($\theta(x)$ è la funzione gradino che vale 1 per $x > 1$, e 0 per $x < 0$) con condizioni al bordo

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \,. \tag{547}$$

Soluzione Es. 1

Consideriamo il fatto che

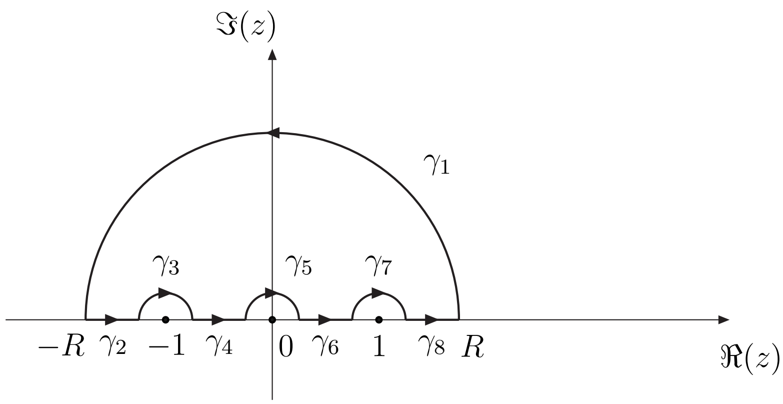
$$I = \Re\left(PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{ix}}{x^2(x^2 - 1)} \right) = \Re(J)\,. \qquad (548)$$

Per calcolare líntegrale J si considera

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2 - 1)} = \frac{1 - e^{iz}}{z^2((z + 1)(z - 1)}\,, \qquad (549)$$

che ha poli singoli in $z = 0$, $z = \pm 1$.

Scegliamo il seguente cammino d'integrazione $\gamma = \sum_{i=1}^{8} \gamma_i$:



Per il teorema di Cauchy si ha

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{\gamma} f(z)\,dz = 0\,. \qquad (550)$$

D'altra parte:

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \sum_{i=3,5,7} \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz + PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{ix}}{x^2(x^2 - 1)}\,. \qquad (551)$$

Inoltre:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{1 - e^{iz}}{z^2(z^2 - 1)} = 0\,, \qquad (552)$$

Poiché

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z^2(z^2 - 1)} = 0\,, \qquad (553)$$

per il lemma di Jordan, e

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2(z^2 - 1)} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2 e^{i2\theta}(R^2 e^{i2\theta} - 1)}\, iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,. \qquad (554)$$

Per il lemma degli archi infinitesimi, invece, si ha:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_3}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2-1)} = -i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = -i\pi\left(-\frac{1-e^{-i}}{2}\right) , \tag{555}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_5}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2-1)} = -i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,0) = \lim_{z\to -1} zf(z) = -i\pi\,(i)\ , \tag{556}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_7}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2-1)} = -i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,1) = \lim_{z\to -1}(z-1)f(z) = -i\pi\left(\frac{1-e^{i}}{2}\right) . \tag{557}$$

In totale si ha

$$PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{ix}}{x^2(x^2-1)} = i\pi\left(i-\frac{1-e^{-i}}{2}+\frac{1-e^{i}}{2}\right) = -\pi\,(1-\sin{(1)})\ . \tag{558}$$

Quindi:

$$PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos{(x)}}{x^2(x^2-1)} = -\pi\,(1-\sin{(1)})\ , \tag{559}$$

$$PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin{(x)}}{x^2(x^2-1)} = 0\,. \tag{560}$$

Soluzione Es. 2

La rappresentazione integrale esibisce un taglio dovuto al logaritmo, sull'asse reale, da $z=1$ a $z=\infty$. Il dominio di analiticità è quindi tutto $\mathbb{C}$ escluso il taglio. In particolare in $z=0$ la funzione $\mathrm{Li}_2(z)$ è analitica (più precisamente ha uno zero del primo ordine).

Possiamo espandere il logaritmo in serie di Taylor in $z=0$:

$$\log{(1-tz)} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(tz)^k}{k} \tag{561}$$

e la serie converge uniformemente con raggio di convergenza 1:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1} = 1\,. \tag{562}$$

Per la convergenza uniforme possiamo integrare termine a termine ottenendo

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^1\frac{dt}{t}\log{(1-tz)} = \int_0^1\frac{dt}{t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(tz)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\int_0^1 dt\,t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}\,. \tag{563}$$

La rappresentazione per serie in Eq. (563) converge uniformemente nel disco di raggio $R=1$ centrato in $z=0$.

Soluzione Es. 3

Usando le proprieta' degli operatori si ha

$$e^{(\mathcal{P}_1+2\mathcal{P}_4)^3} = e^{\mathcal{P}_1+8\mathcal{P}_4} = e\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + e^8\mathcal{P}_4$$

$$\mathcal{A} = (a+e)\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + (b+1)\mathcal{P}_3 + e^8\mathcal{P}_4 \,.$$

Usando il teorema spettrale

$$e^{\mathcal{A}t} = e^{(a+e)t}\,\mathcal{P}_1 + e^t\,\mathcal{P}_2 + e^{(b+1)t}\,\mathcal{P}_3 + e^{e^8 t}\,\mathcal{P}_4$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathcal{A}t}\,\mathbf{x}(0) = c_1 e^{(a+e)t}\,\mathbf{x}_1 + c_2 e^t\,\mathbf{x}_2 + c_3 e^{(b+1)t}\,\mathbf{x}_3 + c_4 e^{e^8 t}\,\mathbf{x}_4$$

per avere $\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t) = 0$ si deve avere $c_2 = c_4 = 0$ inoltre
$c_1 = 0$ se $a+e > 0$ oppure c_1 qualunque se $a+e < 0$;
$c_3 = 0$ se $b+1 > 0$ oppure c_3 qualunque se $b+1 < 0$.

Soluzione Es. 4

Notare che

$$\lim_{b\to 0}\frac{1}{b}\Big(\theta(x+b) - \theta(x-b)\Big) = \frac{1}{2}\delta(x)$$

tenendo conto delle condizioni al bordo si ha

$$f(x) = ae^x \quad per \;\; x < 0$$

$$f(x) = be^{-x} \quad per \;\; x > 0\,.$$

I valori di a e b sono determinati dalle condizioni di raccordo

$$f(-\epsilon) = f(\epsilon) \quad \to \quad a = b$$

$$f'(\epsilon) - f'(-\epsilon) = \frac{1}{2} \quad \to \quad a = -\frac{1}{4}\,,$$

la precedente condizione si ottiene integrando l'equazione

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f = \frac{1}{2}\delta(x)$$

ta $-\epsilon$ ed ϵ.
Si ha quindi

$$f(x) = -\frac{1}{4}e^{-|x|}\,.$$

In alternativa si puo' usare la trasformata di Fourier e si trova

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}(1+k^2)}$$

poi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\hat{f}(k)\,dk\,,$$

un integrale facile da fare con i residui.

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
21 Giugno 2022

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^3+1)}\, dx\,, \tag{564}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 (6 pt)
Specificare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z+2}\log\left(z^2+2\right)}{z\sinh(z)} \tag{565}$$

e calcolare il seguente integrale:

$$\int_\gamma f(z)\, dz\,, \tag{566}$$

dove $\gamma = e^{it}$ con $0 < t \leq 2\pi$, circonferenza centrata nell'origine, di raggio 1.

Esercizio 3 (6 pt)
Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x}\,, \tag{567}$$

ove

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{568}$$

• calcolare $\mathbf{x}(t)$ in funzione di $\mathbf{x}(0)$;
• discutere se esistono condizioni iniziali $\mathbf{x}(0)$ tali che $\mathbf{x}(t)$ diverge per $t \to \infty$.

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la $f(x,t)$ soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = e^{-t}\partial^2_{xx} f(x,t) + \delta(x^2+x)\delta(t^2+t) \tag{569}$$

con $-\infty < x < \infty$ e condizione iniziale $f(x,-1/2) = 0$.

Soluzione Es. 1

Consideriamo la seguente funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{ikz}}{(z^3+1)}, \tag{570}$$

che ha tre poli semplici in

$$z_1 = -1\,, \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,, \quad z_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,, \tag{571}$$

con

$$z_2 z_3 = 1\,, \quad z_2 + 1 = i\sqrt{3} z_3\,, \quad z_3 + 1 = -i\sqrt{3} z_2\,, \quad z_2 - z_3 = i\sqrt{3}\,. \tag{572}$$

A seconda del segno di k possiamo integrare ls $f(z)$ su un cammino $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_r$ dove $\gamma_2 = t$, con $-\infty < t < -1 - r$, $\gamma_1 = t$, con $-1 + r < t < \infty$, γ_R la semicirconferenza di raggio R nel semipiano $\Im z > 0$ o $\Im z < 0$ nel caso $k > 0$ o $k < 0$, rispettivamente. Per γ_r possiamo scegliere indipendentemente purché ci ricordiamo di includere o escludere (a seconda dei casi) il residuo in $z = -1$. Abbiamo:

1. $\boxed{\text{Caso } k > 0}$. Per il Teorema dei Residui si ha

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, z_2)\,, \tag{573}$$

dove abbiamo considerato γ_r nel semipiano superiore. Si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, z_2) &= \lim_{z\to z_2} (z - z_2) \frac{e^{ikz}}{(z+1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{e^{ikz_2}}{(z_2+1)(z_2-z_3)} = -\frac{z_2}{3} e^{ikz_2}\,, \\ &= -\frac{1+i\sqrt{3}}{6} e^{i\frac{k}{2}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}k}\,. \end{aligned} \tag{574}$$

Inoltre

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\gamma f(z)\,dz = I + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz - \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz \tag{575}$$

con

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0\,, \qquad \text{Per il lemma di Jordan} \tag{576}$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = i\pi \mathrm{Res}(f, z_1)\,, \tag{577}$$

dove

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} (z+1) \frac{e^{ikz}}{(z+1)(z^2 - z + 1)} = \frac{e^{-ik}}{3}\,. \tag{578}$$

Infine

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, z_2) + i\pi \mathrm{Res}(f, z_1) = -i\pi \frac{1+i\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{k}{2}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}k} + i\pi \frac{e^{-ik}}{3}\,. \tag{579}$$

2. $\boxed{\text{Caso } k < 0}$. Per il Teorema dei Residui si ha

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\gamma f(z)\, dz = -2\pi \text{Res}(f, z_3)\,, \tag{580}$$

dove il segno meno deriva dal fatto che γ è ora percorso in senso orario e adesso γ_r lo prendiamo nel semipiano inferiore. Inoltre

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_3) &= \lim_{z\to z_3} (z - z_3) \frac{e^{ikz}}{(z+1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{e^{ikz3}}{(z_3+1)(z_3-z_2)} = -\frac{z3}{3} e^{ikz_3}\,, \\ &= -\frac{1-i\sqrt{3}}{6} e^{i\frac{k}{2}} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}k} \end{aligned} \tag{581}$$

e

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_\gamma f(z)\, dz = I + \lim_{R\to\infty} \int_{-\gamma_R} f(z)\, dz + \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \tag{582}$$

con

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\gamma_R} f(z)\, dz = 0\,, \qquad \text{Per il lemma di Jordan} \tag{583}$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = i\pi \text{Res}(f, z_1) = \frac{i\pi}{3} e^{-ik} \tag{584}$$

Infine

$$I = -2\pi i\, \text{Res}(f, z_3) - i\pi \text{Res}(f, z_1) = -i\pi\, \frac{-1+i\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{k}{2}} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}k} - i\pi\, \frac{e^{-ik}}{3}\,. \tag{585}$$

3. $\boxed{\text{Caso } k = 0}$. Se $k = 0$ entrambi i percorsi vanno bene. E infatti le due soluzioni, per $k > 0$ e per $k < 0$, hanno lo stesso limite $k \to 0$ che vale

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,. \tag{586}$$

Possiamo riunire in un'unica formula i due risultati come segue:

$$I = -i\pi\, \left(\frac{k}{3|k|} + \frac{i\sqrt{3}}{3} \right) e^{i\frac{k}{2}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|k|} + \frac{k}{|k|} i\pi\, \frac{e^{-ik}}{3}\,. \tag{587}$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ è una funzione polidroma con punti di diramazione e singolarità polari. Al finito si hanno singolarità polari in

$$z = 0\,, \tag{588}$$

$$\sinh(z) = 0 \Rightarrow z = i\pi k\,, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}\,, \tag{589}$$

quindi $z = 0$ è un polo doppio, mentre $z = i\pi k$ con $k \neq 0$ sono poli semplici.

La radice ha un punto di diramazione in $z = -2$ e un'altro all'infinito. Quindi per prendere il ramo principale della funzione bisogna porre il teglio da -2 all'infinito. Il logaritmo ha due punti di diramazione al finito, in $z = \pm i\sqrt{2}$ e un punto doppio all'infinito. Quindi il ramo principale ha due tagli che collegano il punto $z = i\sqrt{2}$ all'infinito e il punto $z = -i\sqrt{2}$ all'infinito.

Quindi all'interno della circonferenza di raggio 1 rimane soltanto la singolarità isolata in $z = 0$ che è un polo doppio. L'integrale quindi si può fare utilizzando il teorema dei residui:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0)\,, \tag{590}$$

dove il residuo si trova facilmente utilizzando qualche approssimazione

$$f(z) \simeq \frac{\left(\sqrt{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}} + ...\right)\left(\ln(2) + \frac{z^2}{2} + ...\right)}{z^2\left(1 + \frac{z^2}{6} + ...\right)} \simeq \frac{\sqrt{2}\ln(2)}{z^2} + \frac{\ln(2)}{2\sqrt{2}\,z} + ... \tag{591}$$

Quindi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \pi i \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}}\,. \tag{592}$$

Soluzione Es. 3

Calcoliamo gli autovalori e gli autovettori della matrice $\mathcal{A}$, si ottiene

$$\lambda_1 = -1 \;\;,\;\; \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 \;\;,\;\; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 \;\;,\;\; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ovviamente poiché $\mathcal{A}$ e' autoggiunta gli autovalori sono reali e gli autovettori sono tra loro ortogonali, la soluzione e'

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^{3} a_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

ove a_1, a_2 e a_3 sono determinati dalla condizione iniziale.
Notando che $\lambda_3 > 0$ sicuramente esistono condizioni iniziali tali che $\mathbf{x}(t)$ diverge per $t \to \infty$, basta che $\mathbf{x}(0)$ non sia perpendicolare a $\mathbf{v}_3$.

Soluzione Es. 4

Usando le proprietà della funzione delta si ha

$$\delta(x^2+x) = \delta(x) + \delta(x+1)\ ,\ \ \delta(t^2+t) = \delta(t) + \delta(t+1)$$

Tenendo conto della condizione iniziale l'equazione per $t \geq 0$ si riduce ha

$$\partial_t f(x,t) = e^{-t}\partial^2_{xx} f(x,t)$$

con condizione iniziale

$$f(x,0) = \delta(x) + \delta(x+1)\,.$$

Passando in trasformata di Fuorier si ha

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(k,t) = -k^2 e^{-t}\hat{f}(k,t)$$

che si risolve facilmente:

$$\hat{f}(k,t) = e^{-G(t)k^2}\hat{f}(k,0)$$

ove

$$G(t) = \int_0^t e^{-t'}\,dt' = 1 - e^{-t}\,.$$

Si ha quindi

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-G(t)k^2}\hat{f}(k,0)e^{ikx}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int\int e^{-G(t)k^2} f(x',0)e^{ik(x-x')}\,dk\,dx'$$

usando la $f(x',0)$ e ricordando la trasformata di Fourier della Gaussiana si ottiene

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi G(t)}}e^{-\frac{(x+1)^2}{4G(t)}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi G(t)}}e^{-\frac{x^2}{4G(t)}}\ .$$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
5 Luglio 2022

NOTA: $\boxed{\textbf{GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI}}$

$\boxed{\textbf{Es.1 e Es.2 su uno}} \longleftrightarrow \boxed{\textbf{Es.3 e Es.4 sull'altro}}$

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA. Esempio "D. Hilbert, 23011862."

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\sinh(x)} dx \,, \qquad 0 < \alpha < 1 \,. \tag{593}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}\sqrt{\frac{2+z}{1+z}} \tag{594}$$

e calcolare l'integrale

$$\int_\gamma f(z)\, dz \,, \tag{595}$$

dove $\gamma = 5e^{it}$, con $0 \leq t < 2\pi$.

Esercizio 3 (5 pt)
3a) Sia $\mathcal{P}$ un proiettore su un vettore $\mathbf{v} \in R^N$: dire se l'operatore è autoggiunto e trovare i sui autovalori.
3b) $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sono proiettori sui vettori $\mathbf{v}_1 \in R^3$ e $\mathbf{v}_2 \in R^3$ che sono tra loro ortogonali e

$$\mathcal{A} = a\mathcal{P}_2 + b\mathcal{I} + ce^{\mathcal{P}_2 + 2\mathcal{P}_1} \,, \tag{596}$$

ove $\mathcal{I}$ è l'operatore identità, determinare i valori di a, b e c tali che esista $\mathcal{A}^{-1}$.

Esercizio 4 (10 pt)
Data l'equazione

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f = \delta(x-1) \,, \tag{597}$$

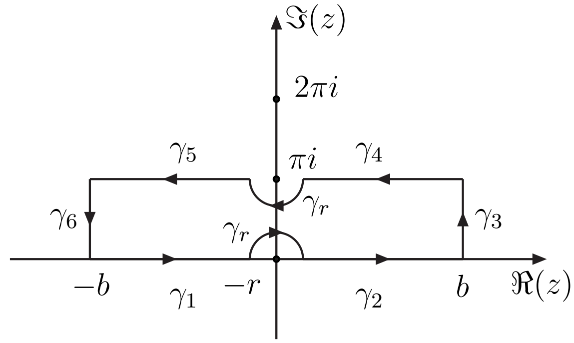
trovare la soluzione $f(x)$ nei seguenti casi:
4a) condizioni al bordo $f(-\infty) = f(\infty) = 0$;
4b) condizioni al bordo $f(0) = f(\infty) = 0$.

Soluzione Es. 1

Per calcolare l'ingegrale consideriamo la seguente funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{\sinh(z)}\,, \tag{598}$$

che ha poli singoli in $z = i\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Integriamo la $f(z)$ sul cammino chiuso in Figura.



Per il teorema di Cauchy avremo:

$$\lim_{\substack{b\to\infty\\ r\to 0}} \int_\Gamma f(z)\,dz = 0\,. \tag{599}$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{b\to\infty\\ r\to 0}} \int_\Gamma f(z)\,dz &= I - i\pi \mathrm{Res}(f,0) + \lim_{b\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{\alpha(b+iy)}}{\sinh(b+iy))} i dy - i\pi\mathrm{Res}(f,i\pi) \\ &\quad - \lim_{\substack{b\to\infty\\ r\to 0}} e^{i\alpha\pi}\int_{\gamma_4+\gamma_5}\frac{e^{\alpha x}}{\sinh(x+i\pi)}dx - \lim_{b\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{\alpha(-b+iy)}}{\sinh(-b+iy))} i dy\end{aligned} \tag{600}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0} z\frac{e^{\alpha z}}{\sinh(z)} = 1\,, & (601)\\ \mathrm{Res}(f,i\pi) &= \lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{e^{\alpha z}}{\sinh(z)} = -e^{i\alpha\pi}\,, & (602)\\ \sinh(x+i\pi) &= -\sinh(x)\,, & (603)\end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{\substack{b\to\infty\\ r\to 0}} e^{i\alpha\pi}\int_{\gamma_4+\gamma_5}\frac{e^{\alpha x}}{\sinh(x+i\pi)}dx = -e^{i\alpha\pi} I\,. \tag{604}$$

Per i due integrali sui segmenti laterali si ha (visto che $0 < \alpha < 1$)

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{\alpha(b+iy)}}{\sinh(b+iy))} i dy = \lim_{b\to\infty}\int_0^\pi 2\frac{e^{\alpha b}e^{iby)}}{e^b e^{iy} - e^{-b}e^{-iy}} i dy \overset{\sim e^{(\alpha-1)b}}{\rightarrow} 0\,, \tag{605}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{\alpha(-b+iy)}}{\sinh\left(-b+iy\right))}idy \quad = \quad \lim_{b\to\infty}\int_0^{\pi}2\frac{e^{-\alpha b}e^{iby)}}{e^{-b}e^{iy}-e^{b}e^{-iy}}idy \overset{\sim e^{-(\alpha+1)b}}{\to} 0\,. \qquad (606)$$

Infine, la (599) si può riscrivere come

$$I\left(1+e^{i\alpha\pi}\right)=i\pi\left(1-e^{i\alpha\pi}\right), \qquad (607)$$

da cui

$$I=i\pi\frac{\left(1-e^{i\alpha\pi}\right)}{\left(1+e^{i\alpha\pi}\right)}=\pi\,\tan\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right). \qquad (608)$$

Soluzione Es. 2

La $f(z)$ è una funzione polidroma. Ha un polo singolo in $z=i$ e uno in $z=-i$. Inoltre, a causa della radice, ha due punti di diramazione in $z=-2$ e in $z=-1$. Nel punto all'infinito si ha

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right)=\frac{\omega}{1+\omega^2}\sqrt{\frac{2\omega+1}{\omega+1}}\,, \qquad (609)$$

che quindi per $\omega\to 0$ ha uno zero di ordine 1 (ed in particolare l'infinito non è punto di diramazione).

Il taglio per la $f(z)$ quindi si prende al finito, che colleghi i due punti di diramazione $z=-1$ e $z=-2$.

L'integrale si può fare utilizzando il teorema dei residui (esterni alla curva), calcolando il residuo nel punto all'infinito. All'interno della curva, infatti, non ci sono solo punti di singolarità isolata, ma anche il taglio.

Si ha

$$\int_\gamma f(z)\,dz=-2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty)=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\omega^2}f\left(\frac{1}{\omega}\right),0\right)\,, \qquad (610)$$

dove

$$\frac{1}{\omega^2}f\left(\frac{1}{\omega}\right)=\frac{1}{\omega(1+\omega^2)}\sqrt{\frac{2\omega+1}{\omega+1}} \qquad (611)$$

e quindi:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\omega^2}f\left(\frac{1}{\omega}\right),0\right)=1\,. \qquad (612)$$

Infine

$$\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i\,. \qquad (613)$$

Soluzione Es. 3

3a) L' operatore e' autoggiunto, come si vede dalla sua espressione in termini di $\mathbf{v}$:

$$P_{ij}=\frac{v_iv_j}{|\mathbf{v}|^2}$$

ovviamente un autovalore e' 1 in fatti

$$\mathcal{P}\mathbf{v}=\mathbf{v}$$

gli altri $N-1$ autovalori sono 0 ed hanno per autovettori $N-1$ vettori tra loro perpendicolari e perpendicolari a $\mathbf{v}$.
3b) Usando il teorema spettrale si ottiene

$$\mathcal{A} = a\mathcal{P}_2 + b\Big(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3\Big) + c\Big(e^2\mathcal{P}_1 + e\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3\Big) = (b+ce^2)\mathcal{P}_1 + (a+b+ce)\mathcal{P}_2 + (b+c)\mathcal{P}_3$$

quindi la matrice inversa esiste se

$$b + ce^2 \neq 0 \ , \ a + b + ce \neq 0 \ , \ b + c \neq 0$$

Soluzione Es. 4

Caso 4a): passando in trasformata di Fourier si ha

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ik}}{k^2 + 1}$$

antitrasformando, con un facile calcolo con i residui si ha:

$$f(x) = -\frac{1}{2} e^{-|x-1|} \ .$$

Lo stesso risultato si puo' ottenere risolvendo l'equazione per $x > 1$, tenendo conto della condizione al contorno si ha

$$f(x) = ae^{-x}$$

analogamente per $x < 1$, tenendo conto della condizione al contorno si ha

$$f(x) = be^{x}$$

a e b si ottengono dalle condizioni di raccordo in $x = 1$ per f e f'
Caso 4b): se si utilizza il metodo delle immagini e' immediato vedere che $f(x)$ e' la soluzione per $x > 0$ del problema

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f = \delta(x-1) - \delta(x+1)$$

con condizioni al bordo $f(-\infty) = f(\infty) = 0$.
Quindi usando il risultato precedente si ha

$$f(x) = -\frac{1}{2} e^{-|x-1|} + \frac{1}{2} e^{-|x+1|} \ .$$

Oppure risolvendo l'equazione per $x > 1$, tenendo conto della condizione al contorno si ha

$$f(x) = ae^{-x}$$

analogamente per $0 < x < 1$:

$$f(x) = be^{x} + ce^{-x}$$

a, b e c si ottengono dalle condizioni di raccordo in $x = 1$ per f e f' e la condizione al bordo in $x = 0$

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
9 Settembre 2022

NOTA: $\boxed{\textbf{GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI}}$

$\boxed{\textbf{Es.1 e Es.2 su uno}} \longleftrightarrow \boxed{\textbf{Es.3 e Es.4 sull'altro}}$

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA. Esempio "D. Hilbert, 23011862."

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{\sinh(x)} dx\,. \tag{614}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Studiare il dominio di analiticità della funzione

$$f(z) = \frac{z}{(z-8)^2\sqrt{z^2-1}} \tag{615}$$

e calcolare l'integrale

$$\int_\gamma f(z)\,dz\,, \tag{616}$$

dove $\gamma = 7 + 2e^{it}$, con $0 \le t < 2\pi$.

Esercizio 3 (6 pt)
Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\,\mathbf{x} \tag{617}$$

ove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\,, \tag{618}$$

trovare i valori di a, b e c reali tali che

$$|\mathbf{x}(t)|^2 = |\mathbf{x}(0)|^2\,. \tag{619}$$

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la $f(x,t)$ soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -\partial_x f(x,t) - f(x,t) + \delta(t^2+t)\Big(\sin 2x + 2\cos 3x - \sin 5x + 1\Big) \tag{620}$$

con $-\pi < x < \pi$, condizioni periodiche al bordo per f e $\partial f/\partial x$, e condizione iniziale $f(x,-1/2) = 0$.

Soluzione Es. 1

L'integrale è la parte immaginaria di

$$I = \Im I' = \Im PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\sinh x} dx\,. \tag{621}$$

Per calcolare I' consideriamo

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sinh(z)}\,, \tag{622}$$

funzione analitica in $\mathbb{C}$ tranne nei punti in cui si annulla il denominatore, ovvero

$$z = k\pi i\,, \tag{623}$$

con $k \in \mathbb{Z}$, che sono dei poli semplici.

Consideriamo il cammino $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8$ come segue

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= x\,, \qquad \epsilon \le x \le R\,, && (624)\\
\gamma_2 &= R + iy\,, \qquad 0 \le y \le \pi\,, && (625)\\
\gamma_3 &= x + i\pi\,, \qquad R \ge x \ge \epsilon\,, && (626)\\
\gamma_4 &= x + i\pi\,, \qquad -\epsilon \ge x \ge -R\,, && (627)\\
\gamma_5 &= -R + iy\,, \qquad \pi \ge y \ge 0\,, && (628)\\
\gamma_6 &= x\,, \qquad -R \le x \le -\epsilon\,, && (629)\\
\gamma_7 &= \pi i + \epsilon e^{it}\,, \qquad -\pi \le t \le 0 && (630)\\
\gamma_8 &= \epsilon e^{it}\,, \qquad \pi \le t \le 0\,. && (631)
\end{aligned}$$

La $f(z)$ non ha singolarità interne a γ, quindi per il teorema di Cauchy si ha

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,. \tag{632}$$

Inoltre

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_\gamma f(z)\, dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \sum_{i=1}^{8} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz\,, \tag{633}$$

dove

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\gamma_6+\gamma_1} f(z)\, dz &= I' && (634)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\, dz &= \int_0^\pi \frac{2e^{iR-y}}{e^{R+iy} - e^{-R-iy}}\, i\, dy \to 0 && (635)\\
\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\gamma_3+\gamma_4} f(z)\, dz &= e^{-\pi} PV \int_R^{-R} \frac{2e^{ix}}{e^{x+i\pi} - e^{-x-i\pi}} dx = e^{-\pi} I' && (636)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_5} f(z)\, dz &= \int_\pi^0 \frac{2e^{-iR-y}}{e^{R-iy} - e^{-R+iy}}\, i\, dy \to 0 && (637)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_8} f(z)\,dz &= -i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,0) && (638)\\ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_7} f(z)\,dz &= -i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,i\pi)\ . && (639) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$(1+e^{-\pi})\,I' = i\pi\,[\mathrm{Res}\,(f,0)+\mathrm{Res}\,(f,i\pi)]\ . \tag{640}$$

Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(f,0) &= 1\,, && (641)\\ \mathrm{Res}\,(f,i\pi) &= -e^{-\pi}\,. && (642) \end{aligned}$$

In totale:

$$I' = i\pi\,\frac{1-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = i\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{643}$$

Quindi

$$I = \pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{644}$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ ha un polo doppio nel punto $z=8$, due punti di diramazione $z=\pm 1$. Per quanto riguarda il punto all'infinito, abbiamo

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{\omega^2}{(1-8\omega)^2\sqrt{1-\omega^2}}\,. \tag{645}$$

Quindi il punto all'infinito è un punto regolare per la funzione (zero di ordine 2).

Poniamo il taglio sul segmento dell'asse reale che unisce i due punti di diramazione. Notiamo che la circonferenza su cui dobbiamo integrare include il polo $z=8$, ma esclude il taglio dovuto alla radice. In quella regione la radice è analitica. Possiamo utilizzare allora il teorema dei residui (oppure la formula integrale di Cauchy per la derivata) per avere

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,8) = 2\pi i\,\left.\frac{d}{dz}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right|_{z=8} = -\frac{2}{189\sqrt{7}}\pi i\,. \tag{646}$$

Soluzione Es. 3

Per avere $|\mathbf{x}(t)|^2 = |\mathbf{x}(0)|^2$ la matrice

$$e^{t\mathcal{A}}$$

deve essere unitaria, questo è possibile solo se gli autovalori $\lambda_{1,2}$ della matrice $\mathcal{A}$ sono immaginari puri:

$$(a-\lambda)^2 - bc = 0 \quad\to\quad \lambda = a\pm\sqrt{bc}$$

quindi la condizione cercata è:

$$a=0\ ,\ bc<0\,.$$

Soluzione Es. 4

Usando le proprietà della delta di Dirac si ha

$$\delta(t^2 + t) = \delta(t + 1) + \delta(t) \,,$$

e integrando l'equazione tra $-\epsilon$ ed ϵ si ha

$$f(x, \epsilon) = \sin 2x + 2 \cos 3x - \sin 5x + 1$$

quindi per $t > 0$ si ha l'equazione

$$\partial_t f(x, t) = -\partial_x f(x, t) - f(x, t) \tag{1}$$

con condizione iniziale

$$f(x, 0) = \sin 2x + 2 \cos 3x - \sin 5x + 1 \ .$$

Sviluppando in serie di Fourier complessa si ha

$$f(x, t) = \sum_n f_n(t) e^{inx}$$

$$\frac{d}{dt} f_n = -(in + 1) f_n \ \rightarrow \ f_n(t) = f_n(0) e^{-(in+1)t} \ .$$

Quindi

$$f(x, t) = \sum_n f_n(0) e^{in(x-t)} e^{-t} \,, \tag{2}$$

dalla condizione iniziale gli unici n coinvolti sono $n = 0, \pm 2, \pm 3$ e ± 5, con calcoli elementari, usando la condizione iniziale, si ha

$$f(x, t) = \Big(\sin 2(x - t) + 2 \cos 3(x - t) - \sin 5(x - t) + 1 \Big) e^{-t} \ .$$

Notare che la soluzione ha la forma

$$f(x, t) = f(x - t, 0) e^{-t} \ ,$$

cosa che si può ricavare semplicemente guardando la (2):

$$f(x, t) = \Big(\sum_n f_n(0) e^{in(x-t)} \Big) e^{-t} = f(x - t, 0) e^{-t}$$

oppure direttamente dalla forma dell'equazione.
Si può anche usare la serie di Fourier reale, i calcoli sono simili ed ovviamente si ottiene lo stesso risultato.