Esame 3 Febbraio 2017

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2016-2017

Regole per lo scritto:

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 in 3h.

Esame - Fisica Generale I
3 Febbraio 2017

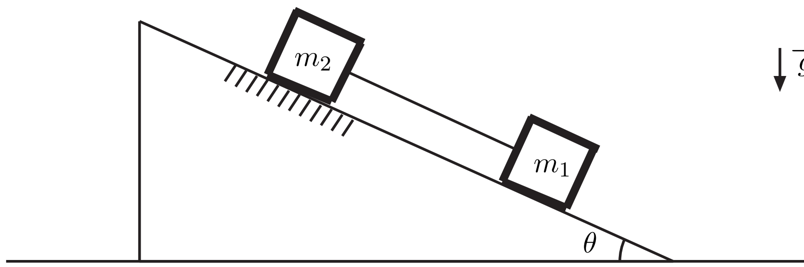
R. Bonciani, P. Dore

Regole per lo scritto

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 (contrassegnati con $*$) in 3h.

Esercizio 1 $*$

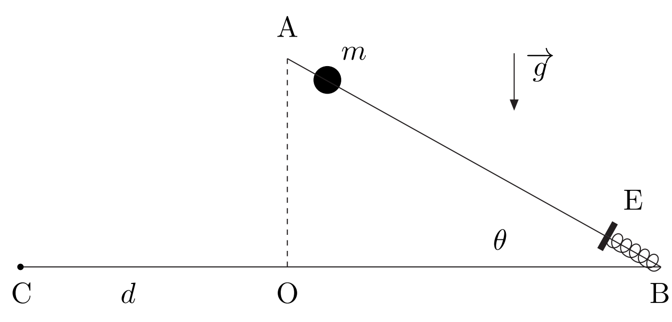
Due corpi di massa $m_1 = 3$ kg e $m_2 = 1$ kg, posti su un piano inclinato di un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale, sono legati fra loro da una fune ideale. Il corpo m_1 è libero di scorrere senza attrito sul piano inclinato, mentre fra m_2 e il piano c'è attrito con coefficiente $\mu_d = 0.3$.



1. Calcolare l'accelerazione di m_2.
2. Se ad m_2 viene applicata una forza costante e in direzione parallela al piano, calcolare il valore di F per il quale il sistema si muove verso l'alto con velocità costante.
3. Calcolare il valore della tensione della fune nei due casi.

Esercizio 2

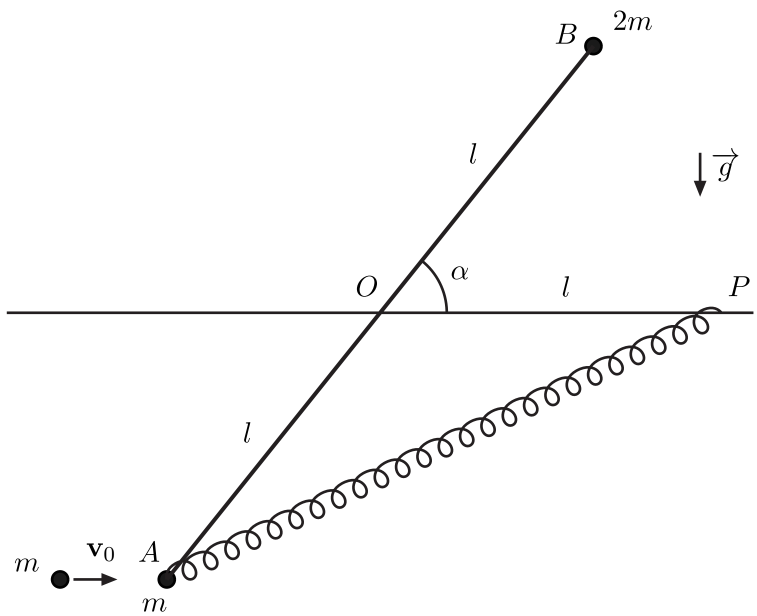
Un anellino di massa $m = 200$ g viene infilato in una guida filiforme scabra AB di lunghezza $L = 1$ m, aperta all'estremo A e inclinata di $\theta = \pi/6$ rispetto all'orizzontale. Fra anello e guida c'è attrito dinamico con coefficiente $\mu_d = 0.2$. In fondo alla guida è posta una molla di costante elastica $k = 90$ N/m e lunghezza di riposo $l_0 = 30$ cm. All'istante iniziale la molla è in equilibrio ($EB = l_0$). L'anello parte da A con una velocità iniziale di modulo $v_0 = 5$ m/s, diretta lungo la guida verso il punto B.



1. Calcolare la compressione massima della molla Δl.
2. Calcolare la velocità v_1 con cui l'anello ritorna in A dopo essere stato respinto verso l'alto dalla molla.
3. Calcolare la distanza d da O a cui cade l'anello (dopo aver lasciato il punto A, il moto dell'anello prosegue nel vuoto).

Esercizio 3 $*$

Un manubrio è costituito da un'asta omogenea e da due punti materiali fissati ai suoi estremi A e B. L'asta, che ha massa $m = 40$ g e lunghezza $2l$, con $l = 20$ cm, è incernierata nel suo punto medio O, fissato su un piano verticale, attorno al quale può ruotare senza attrito. Il punto materiale fissato in A ha massa m, mentre quello in B ha massa $2m$. Una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile ($l_0 = 0$) collega l'estremità A al punto P sull'asse orizzontale passante per O. Il punto P dista l da O.



1. Inizialmente il sistema è in equilibrio e l'asta forma un angolo $\alpha = \pi/3$ con l'asse orizzontale OP. Calcolare la costante elastica della molla.
2. A $t = 0$ un punto materiale di massa m urta il punto A con velocità $\mathbf{v}_0$ diretta orizzontalmente come in figura e di modulo $v_0 = 10$ m/s. L'urto è perfettamente anelastico e avviene in un tempo trascurabile. Calcolare la velocità angolare dell'asta immediatamente dopo l'urto.

Esercizio 4 $*$

Due moli di gas perfetto biatomico compiono il seguente ciclo: dallo stato iniziale A con $p_A = 2$ atm e $V_A = 10$ l il sistema compie una trasformazione IRREVERSIBILE che lo porta nello stato B, con $p_B = 2p_A$ e $V_B = V_A/2$; una isobara REVERSIBILE porta poi il sistema nello stato C, con $V_C = V_A$ e infine il sistema torna nello stato A con una trasformazione isocora REVERSIBILE. Il lavoro totale compiuto nel ciclo è $L_{TOT} = 15$ l·atm.

1. Disegnare il ciclo nel piano di Clapeyron.
2. Calcolare il calore Q_{AB} scambiato nella trasformazione irreversibile da A a B.
3. Calcolare il rendimento η del ciclo.
4. Calcolare la variazione di entropia ΔS_{AB} nella trasformazione irreversibile da A a B.

Soluzione esercizio 1

1. Poiché sono collegati dalla fune, i due corpi procedono con la stessa accelerazione a. Scegliendo l'asse x orientato verso il basso, le equazioni del moto dei due corpi sono:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin\theta - T \\ m_2 a = m_2 g \sin\theta + T - \mu_d m_2 g \cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

   Sommando le due equazioni si ricava:

$$(m_1 + m_2)a = [(m_1 + m_2)\sin\theta - \mu_d m_2 \cos\theta]\, g \tag{2}$$

   e infine

$$a = g\left[\sin\theta - \mu_d \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos\theta\right] = 4.27\ \text{m/s}^2 \tag{3}$$

2. Poiché si muovono con velocità costante i due corpi hanno accelerazione nulla. Scegliendo l'asse x orientato verso l'alto, le equazioni del moto dei due corpi in questo caso sono:

$$\begin{cases} T' - m_1 g \sin\theta = 0 \\ F - m_2 g \sin\theta - \mu_d m_2 g \cos\theta - T' = 0 \end{cases} \tag{4}$$

   da cui:

$$F = [(m_1 + m_2)\sin\theta + \mu_d m_2 \cos\theta]\, g = 22.17\ \text{N} \tag{5}$$

3. Nel primo caso la tensione T si ricava sostituendo il valore di a, calcolato nel punto 1, nell'equazione del moto (1) per il corpo m_1:

$$T = m_1(g\sin\theta - a) = 1.91\ \text{N} \tag{6}$$

   Nel secondo caso la tensione T' si ricava direttamente dall'equazione del moto (4) per il corpo m_1:

$$T' = m_1 g \sin\theta = 14.72\ \text{N} \tag{7}$$

Soluzione esercizio 2

1. Per determinare la compressione massima della molla possiamo utilizzare il teorema delle forze vive. Consideriamoil tratto discendente, da quando l'anello parte da A con velocità iniziale v_0 fino a quando si ferma con la molla massimamente compressa in E' a distanza $l_0 - \Delta l$ dal punto B.

   Si ha

$$L_{AE'} = -\frac{1}{2}mv_0^2 = 2.5\ \text{J}\,. \tag{8}$$

   D'altra parte, si ha anche

$$\begin{aligned} L_{AE'} &= V(A) - V(E') + \int_A^{E'} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{r}\,, &(9)\\ &= mgL\sin\theta - mg(l_0 - \Delta l)\sin\theta - \frac{1}{2}k\Delta l^2 - N\mu_d[L - (l_0 - \Delta l)]\,. &(10)\end{aligned}$$

   Uguagliando le due relazioni si ottiene

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL\sin\theta - mg(l_0 - \Delta l)\sin\theta - \frac{1}{2}k\Delta l^2 - N\mu_d[L - (l_0 - \Delta l)]\,, \tag{11}$$

ovvero

$$\Delta l^2 - 2\left(\frac{g}{\omega^2}\sin\theta - \frac{N\mu_d}{k}\right)\Delta l - \frac{v_0^2}{\omega^2} - 2\left(\frac{g}{\omega^2}\sin\theta - \frac{N\mu_d}{k}\right)(L - l_0) = 0\,. \quad (12)$$

Per trovare N si utilizza il secondo principio della dinamica in direzione perpendicolare al piano inclinato, ricavando

$$N = mg\cos\theta = 1.7\ \mathrm{N}\,, \quad (13)$$

che sostituita in (12) dà:

$$\Delta l^2 - \frac{g}{\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d)\Delta l - \frac{v_0^2}{\omega^2} - \frac{g}{\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d)(L - l_0) = 0\,, \quad (14)$$

dove abbiamo esplicitato il valore di $\sin(\pi/6) = 1/2$ e di $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

L'Eq. (14) ha due soluzioni

$$\Delta l = \frac{g}{2\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d) \pm \sqrt{\frac{g^2}{4\omega^4}(1 - \sqrt{3}\mu_d)^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d)(L - l_0)}\,. \quad (15)$$

Prendiamo la soluzione positiva, e quindi

$$\Delta l = \frac{g}{2\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d) + \sqrt{\frac{g^2}{4\omega^4}(1 - \sqrt{3}\mu_d)^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} + \frac{g}{\omega^2}(1 - \sqrt{3}\mu_d)(L - l_0)} = 26\ \mathrm{cm}\,. \quad (16)$$

2. La velocità v_1 con cui l'anello torna in A sarà data sempre dal teorema delle forze vive da A in A:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -2N\mu_d[L - (l_0 - \Delta l)]\,, \quad (17)$$

ovvero

$$v_1^2 = v_0^2 - 2\sqrt{3}g\mu_d(L - l_0 + \Delta l)\,, \quad (18)$$

quindi

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\sqrt{3}g\mu_d(L - l_0 + \Delta l)} = 4.7\ \mathrm{m/s}\,. \quad (19)$$

3. Da A a C il problema si riduce ad un problema di balistica. Prendendo come origine degli assi cartesiani il punto O, l'anello parte da $(0, L\sin\theta)$ con velocità iniziale (v_{1x}, v_{1y}) con $v_{1x} = -v_1\cos\theta$ e $v_{1y} = v_1\sin\theta$.

La soluzione generale del moto è

$$\begin{cases} x(t) = v_{1x}t + x(0)\,, \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{1y}t + y(0)\,, \end{cases} \quad (20)$$

e mettendo le condizioni iniziali si trova l'equazione della traiettoria

$$y = -\frac{g}{2v_1^2\cos^2\theta}\,x^2 - \tan\theta\,x + L\sin\theta\,. \quad (21)$$

Imponendo il passaggio da $(-d, 0)$ (con $d > 0$), ed esplicitando i valori trigonometrici, si ottiene:

$$0 = -\frac{2gd^2}{3v_1^2} + \frac{\sqrt{3}}{3}d + \frac{L}{2}\,, \quad (22)$$

cioè l'equazione del secondo ordine

$$d^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v_1^2}{g}\,d - \frac{3}{4}\frac{Lv_1^2}{g} = 0\,. \tag{23}$$

L'Eq. (23) ha due soluzioni delle quali dobbiamo prendere quella positiva:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{v_1^2}{g} + \sqrt{\frac{3}{16}\frac{v_1^4}{g^2} + \frac{3}{4}\frac{Lv_1^2}{g}} = 2.6\ \mathrm{m} \tag{24}$$

Soluzione esercizio 3

1. Se BOP è l'angolo α, si avrà $AOP = \pi - \alpha$ e

$$OAP = OPA = \frac{1}{2}(\pi - AOP) = \frac{\alpha}{2}\,. \tag{25}$$

Se $\alpha = \pi/3$, quindi, si ha $OAP = OPA = \pi/6$.

Si può trovare la soluzione al primo quesito utilizzando la seconda cardinale oppure con l'energia.

Seconda Cardinale

Per applicare la seconda cardinale dobbiamo trovare il valore del modulo della forza elastica $\mathbf{F}_e$ applicata in A. La lunghezza $AP = L$ sarà data da

$$L = 2l\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = l\sqrt{3} = 34.6\ \mathrm{cm}\,. \tag{26}$$

Quindi il modulo della forza elastica, applicata in A verso P, è

$$F_e = kL = kl\sqrt{3}\,. \tag{27}$$

Scrivendo la seconda cardinale della statica con centro di riduzione in O, si ha

$$mgl\cos\alpha + lF_e\sin\frac{\alpha}{2} - 2mgl\cos\alpha = 0\,, \tag{28}$$

e sostituendo il valore di F_e, si trova

$$k = \frac{mg}{l\sqrt{3}} = 1.13\ \mathrm{N/m}\,. \tag{29}$$

Energia

Troviamo l'energia potenziale per il sistema. Poniamo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale all'altezza di O. Quindi

$$V(\alpha) = 2mgl\sin\alpha - mgl\sin\alpha + \frac{1}{2}kL^2\,, \tag{30}$$

$$= mgl\sin\alpha + 2l^2k\cos^2\frac{\alpha}{2}\,. \tag{31}$$

Quindi, imponendo

$$\left.\frac{dV}{d\alpha}\right|_{\alpha=\pi/3} = \left.\left(mgl\cos\alpha - 2l^2k\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right|_{\alpha=\pi/3} = 0\,, \tag{32}$$

si ottiene

$$k = \left.\frac{mg}{l}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|_{\alpha=\pi/3} = \frac{mg}{l\sqrt{3}} = 1.13\ \mathrm{N/m}\,. \tag{33}$$

2. Nell'urto istantaneo la forza elastica non si comporta in maniera impulsiva. Le reazioni vincolari sono concentrate in O. Quindi i momenti angolari rispetto ad O, calcolati subito prima e subito dopo l'urto devono essere uguali. Quindi

$$\begin{aligned} L_{ini} &= mv_0 l \sin\alpha\,, & (34)\\ L_{fin} &= \tilde{I}_0\omega\,, & (35) \end{aligned}$$

dove

$$\tilde{I}_0 = 4ml^2 + I_0 = 4ml^2 + m\frac{l^2}{3} = \frac{13}{3}ml^2\,. \tag{36}$$

Infine, imponendo $L_{ini} = L_{fin}$ si trova

$$\omega = \frac{3v_0}{13\,l}\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{26}\frac{v_0}{l} = 10.0\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{37}$$

Soluzione esercizio 4

2. La temperature degli stati A, B e C si rivacano dall'equazione di stato:

$$\begin{cases} T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 122\ \mathrm{K} \\ T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{2P_A \frac{1}{2} V_A}{nR} = \frac{P_A V_A}{nR} = T_A \\ T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{P_B V_A}{nR} = 2\frac{P_A V_A}{nR} = 2T_A = 244\ \mathrm{K} \end{cases} \tag{38}$$

Il calore scambiato nella trasformazione AB si ricava per differenza tra il calore totale scambiato durante il ciclo e quelli scambiati nelle trasformazioni reversibili:

$$Q_{AB} = Q_{TOT} - Q_{BC} - Q_{CA} \tag{39}$$

dove $Q_{TOT} = L_{TOT} = 15\ \mathrm{l}\cdot\mathrm{atm} = 1520\ \mathrm{J}$, perché nel ciclo $\Delta U_{TOT} = 0$, ed i calori nelle trasformazioni reversibili sono dati da:

$$\begin{cases} Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) = 70\ \mathrm{l}\cdot\mathrm{atm} = 7093\ \mathrm{J} \\ Q_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = -50\ \mathrm{l}\cdot\mathrm{atm} = -5066\ \mathrm{J} \end{cases} \tag{40}$$

Quindi $Q_{AB} = -5\ \mathrm{l}\cdot\mathrm{atm} = -507\ \mathrm{J}$.

3. Nel ciclo il calore viene assorbito solo durante la trasformazione BC, quindi $Q_{ASS} = Q_{BC} = 70\ \mathrm{l}\cdot\mathrm{atm}$ ed il rendimento è:

$$\eta = \frac{L_{TOT}}{Q_{ASS}} = 21\% \tag{41}$$

4. Poiché $T_A = T_B$ posso calcolare ΔS_{AB} lungo la corrispondente isoterma reversibile ($dU = 0$) che collega i due stati:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_A} = \frac{1}{T_A}\int_{V_A}^{V_B} p dV = nR\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V} \tag{42}$$

$$= nR\ln\frac{V_B}{V_A} = -0.114\ \mathrm{l}\cdot\mathrm{atm}\cdot\mathrm{K}^{-1} = -11.55\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1} \tag{43}$$