Esame 4 Maggio 2022

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2020-2021

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
4 Maggio 2022

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2(x^2-1)} \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
La funzione $\mathrm{Li}_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, è data dalla seguente rappresentazione integrale

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^1 \frac{dt}{t} \log(1-tz) \,. \tag{2}$$

Discuterne il dominio di analiticità. Trovare un'espressione per $\mathrm{Li}_2(z)$ in serie di potenze centrata in $z=0$ e discuterne il raggio di convergenza.

Esercizio 3 (6 pt)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x} \,, \tag{3}$$

ove $\mathcal{A}$ è la matrice 4×4

$$\mathcal{A} = a\mathcal{P}_1 + b\mathcal{P}_3 + e^{(\mathcal{P}_1+2\mathcal{P}_4)^3} \tag{4}$$

e $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$ sono i proiettori sui vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ tra loro ortogonali, e la condizione iniziale

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{n=1}^{4} c_n \mathbf{x}_n \,, \tag{5}$$

si trovino i valori reali di a, b, c_1, c_2, c_3 e c_4 tali che

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0 \,. \tag{6}$$

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f = \frac{1}{4b}\Big(\theta(x+b) - \theta(x-b)\Big) \tag{7}$$

nel limite $b \to 0$ ($\theta(x)$ è la funzione gradino che vale 1 per $x > 1$, e 0 per $x < 0$) con condizioni al bordo

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \,. \tag{8}$$

Soluzione Es. 1

Consideriamo il fatto che

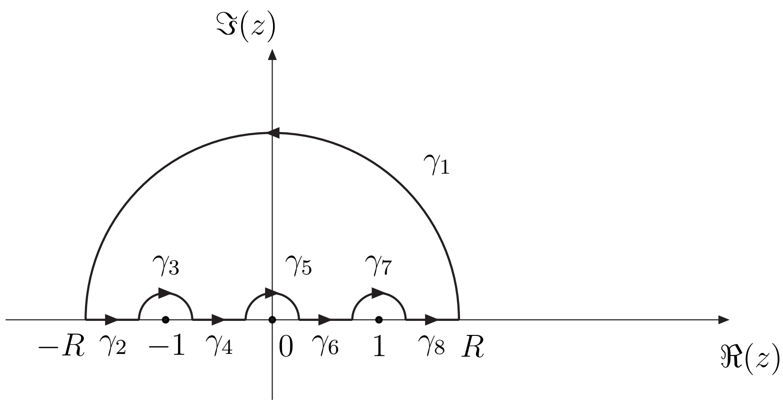
$$I = \Re\left(PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2(x^2-1)} \right) = \Re(J)\,. \tag{9}$$

Per calcolare líntegrale J si considera

$$f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2-1)} = \frac{1-e^{iz}}{z^2((z+1)(z-1)}\,, \tag{10}$$

che ha poli singoli in $z=0$, $z=\pm 1$.

Scegliamo il seguente cammino d'integrazione $\gamma = \sum_{i=1}^{8} \gamma_i$:



Per il teorema di Cauchy si ha

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{\gamma} f(z)\,dz = 0\,. \tag{11}$$

D'altra parte:

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \sum_{i=3,5,7} \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz + PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2(x^2-1)}\,. \tag{12}$$

Inoltre:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2-1)} = 0\,, \tag{13}$$

Poiché

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z^2(z^2-1)} = 0\,, \tag{14}$$

per il lemma di Jordan, e

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2(z^2-1)} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2 e^{i2\theta}(R^2 e^{i2\theta}-1)}\, iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,. \tag{15}$$

Per il lemma degli archi infinitesimi, invece, si ha:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_3}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2-1)} = -i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = -i\pi\left(-\frac{1-e^{-i}}{2}\right)\,, \tag{16}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_5}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2-1)} = -i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,0) = \lim_{z\to -1} zf(z) = -i\pi\,(i)\,, \tag{17}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_7}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2-1)} = -i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,1) = \lim_{z\to -1}(z-1)f(z) = -i\pi\left(\frac{1-e^{i}}{2}\right)\,. \tag{18}$$

In totale si ha

$$PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{ix}}{x^2(x^2-1)} = i\pi\left(i-\frac{1-e^{-i}}{2}+\frac{1-e^{i}}{2}\right) = -\pi\,(1-\sin{(1)})\,. \tag{19}$$

Quindi:

$$PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos{(x)}}{x^2(x^2-1)} = -\pi\,(1-\sin{(1)})\,, \tag{20}$$

$$PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin{(x)}}{x^2(x^2-1)} = 0\,. \tag{21}$$

Soluzione Es. 2

La rappresentazione integrale esibisce un taglio dovuto al logaritmo, sull'asse reale, da $z=1$ a $z=\infty$. Il dominio di analiticità è quindi tutto $\mathbb{C}$ escluso il taglio. In particolare in $z=0$ la funzione $\mathrm{Li}_2(z)$ è analitica (più precisamente ha uno zero del primo ordine).

Possiamo espandere il logaritmo in serie di Taylor in $z=0$:

$$\log{(1-tz)} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(tz)^k}{k} \tag{22}$$

e la serie converge uniformemente con raggio di convergenza 1:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1} = 1\,. \tag{23}$$

Per la convergenza uniforme possiamo integrare termine a termine ottenendo

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^1\frac{dt}{t}\log{(1-tz)} = \int_0^1\frac{dt}{t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(tz)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\int_0^1 dt\,t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}\,. \tag{24}$$

La rappresentazione per serie in Eq. (24) converge uniformemente nel disco di raggio $R=1$ centrato in $z=0$.

Soluzione Es. 3

Usando le proprieta' degli operatori si ha

$$e^{(\mathcal{P}_1+2\mathcal{P}_4)^3} = e^{\mathcal{P}_1+8\mathcal{P}_4} = e\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + e^8\mathcal{P}_4$$

$$\mathcal{A} = (a+e)\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + (b+1)\mathcal{P}_3 + e^8\mathcal{P}_4 \, .$$

Usando il teorema spettrale

$$e^{\mathcal{A}t} = e^{(a+e)t}\,\mathcal{P}_1 + e^t\,\mathcal{P}_2 + e^{(b+1)t}\,\mathcal{P}_3 + e^{e^8 t}\,\mathcal{P}_4$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathcal{A}t}\,\mathbf{x}(0) = c_1 e^{(a+e)t}\,\mathbf{x}_1 + c_2 e^t\,\mathbf{x}_2 + c_3 e^{(b+1)t}\,\mathbf{x}_3 + c_4 e^{e^8 t}\,\mathbf{x}_4$$

per avere $\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t) = 0$ si deve avere $c_2 = c_4 = 0$ inoltre
$c_1 = 0$ se $a + e > 0$ oppure c_1 qualunque se $a + e < 0$;
$c_3 = 0$ se $b + 1 > 0$ oppure c_3 qualunque se $b + 1 < 0$.

Soluzione Es. 4

Notare che

$$\lim_{b\to 0}\frac{1}{b}\Big(\theta(x+b) - \theta(x-b)\Big) = \frac{1}{2}\delta(x)$$

tenendo conto delle condizioni al bordo si ha

$$f(x) = ae^x \quad per \;\; x < 0$$

$$f(x) = be^{-x} \quad per \;\; x > 0 \, .$$

I valori di a e b sono determinati dalle condizioni di raccordo

$$f(-\epsilon) = f(\epsilon) \quad \to \quad a = b$$

$$f'(\epsilon) - f'(-\epsilon) = \frac{1}{2} \quad \to \quad a = -\frac{1}{4} \, ,$$

la precedente condizione si ottiene integrando l'equazione

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f = \frac{1}{2}\delta(x)$$

ta $-\epsilon$ ed ϵ.
Si ha quindi

$$f(x) = -\frac{1}{4}e^{-|x|} \, .$$

In alternativa si puo' usare la trasformata di Fourier e si trova

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}(1+k^2)}$$

poi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\hat{f}(k)\,dk \, ,$$

un integrale facile da fare con i residui.