Esame 6 Luglio 2021

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2020-2021

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
6 Luglio 2021

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1} dx\,, \tag{1}$$

considerando per le funzioni polidrome il ramo principale.

Esercizio 2 (6 pt)
Discutere il dominio di analiticità della funzione

$$L(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt}\, dt\,, \tag{2}$$

e trovarne il prolungamento analitico.

Esercizio 3 (7 pt)
Data la l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathcal{A}\,\mathbf{x} \tag{3}$$

ove $\mathbf{x} \in R^4$ e

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

1) scrivere $\mathbf{x}(t)$ in funzione di $\mathbf{x}(0)$
2) sia $\mathbf{x}(0) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ la condizione iniziale, determinare per quali valori di x_1, x_2, x_3 e x_4 si ha

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0\,. \tag{5}$$

Suggerimento: $0 = 1 - 1$.

Esercizio 4 (8 pt)
Data la funzione

$$P(x) = \Theta(x)\, e^{-x} \tag{6}$$

ove $\Theta(x)$ indica la funzione gradino che vale 0 se $x < 0$ e vale 1 se $x > 0$, calcolare

$$f(x) = \int\int P(x_1)P(x_2)\delta(x - x_1 - x_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{7}$$

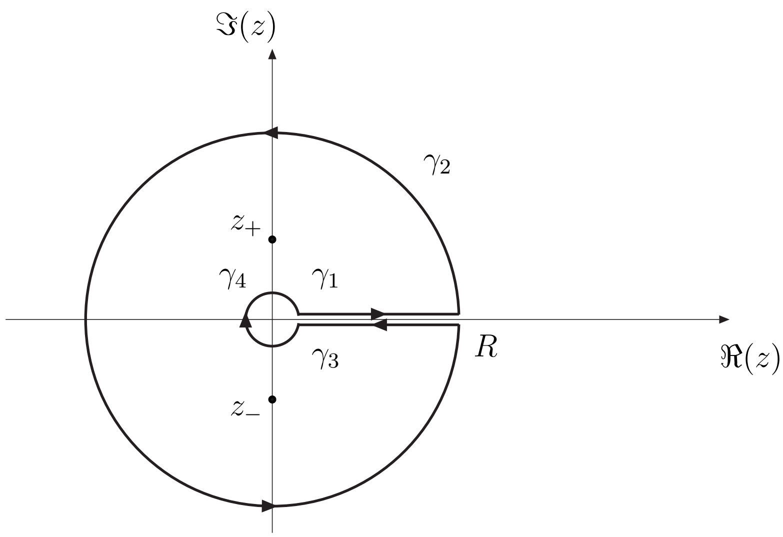
Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2+1}\,, \tag{8}$$

che è polidroma. Prendiamo il taglio lungo il semiasse reale positivo. Inoltre, la $f(z)$ ha due poli semplici in $z_\pm = \pm i$.

Scegliamo il seguente cammino d'intgegrazione[1]:



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,dz &= 2\pi i\left\{\mathrm{Res}(f,z_+)+\mathrm{Res}(f,z_+)\right\}\,, &(9)\\
&= 2\pi i\left\{-\frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}+\frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}\right\}\,, &(10)\\
&= \pi\, e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\,. &(11)
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_{\gamma_1} f(z) &= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}dx\,, &(12)\\
\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{R^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}}}{R^2e^{i2\theta}+1}\,iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,, &(13)\\
\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_{\gamma_3} f(z) &= \int_\infty^0\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}\right)dx = -e^{\frac{2\pi}{3}i}\int_0^\infty\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}dx\,, &(14)
\end{aligned}$$

[1]Si potrebbe scegliere anche una semicirconferenza sul semipiano superiore, $Re^{i\theta}$ con $0<\theta<\pi$, chiusa da un segmento sull'asse reale con $-R<x<R$. Infatti nel denominatore di $f(z)$ c'è uno z^2 che rimane sé stesso anche se $z\to ze^{i\pi}$.

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_4} f(z) \;=\; -\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{r^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}}}{r^2e^{i2\theta}+1}\, ire^{i\theta}\, d\theta = 0\,. \tag{15}$$

In totale si trova

$$I\left(1-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \pi\, e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\,, \tag{16}$$

ovvero

$$I = \frac{\pi\, e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{\left(1-e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)} = \frac{\pi\, e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)} = \pi\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,. \tag{17}$$

Soluzione Es. 2

La funzione

$$f(z,t) = t^3e^{-zt} \tag{18}$$

è integrabile in t purché $\Re(z) > 0$. Infatti in $t = 0$ non ci sono problemi (la funzione va rapidamente a zero); in $t \to \infty$ l'integrale converge solo se l'esponenziale va a zero e questo succede se $\Re(z) > 0$. Da notare che deve essere $\Re(z) \neq 0$ (cioè $\Re(z)$ è strettamente > 0); infatti in $\Re(z) = 0$ l'integrale non converge. Nel dominio di convergenza dell'integrale, si ha

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) L(z) = 0\,, \tag{19}$$

come si può verificare per calcolo diretto. Quindi la $L(z)$ definita tramite la rappresentazione integrale è analitica nel semipiano $\Re(z) > 0$.

La continuazione analitica a tutto il piano complesso si ottiene calcolando l'integrale (per parti) nella regione di convergenza e trovando quindi un'espressione in forma chiusa per la $L(z)$:

$$\begin{aligned} L(z) &= \int_0^\infty t^3e^{-zt}\,dt = -\frac{t^3}{z}e^{-zt}\bigg|_0^\infty + 3\int_0^\infty \frac{t^2}{z}e^{-zt}\,dt = 3\int_0^\infty \frac{t^2}{z}e^{-zt}\,dt \\ &= -3\frac{t^2}{z^2}e^{-zt}\bigg|_0^\infty + 6\int_0^\infty \frac{t}{z^2}e^{-zt}\,dt = 6\int_0^\infty \frac{t}{z^2}e^{-zt}\,dt \\ &= -6\frac{t}{z^3}e^{-zt}\bigg|_0^\infty + \frac{6}{z^3}\int_0^\infty e^{-zt}\,dt = \frac{6}{z^4}\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Questa forma della $L(z)$ coincide con la rappresentazione integrale in $\Re(z) > 0$, ma è analitica in tutto $\mathbb{C}$ tranne in $z = 0$, dove ha un polo del quarto ordine. Costituisce quindi la continuazione analitica della $L(z)$ a tutto $\mathbb{C}$.

Soluzione Es. 3

Notare che

$$\mathcal{A} = 4\mathcal{P}_1 - \mathcal{I}$$

ove $\mathcal{I}$ e' la matrice identita' e

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e' il proiettore sul vettore $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)$.
Ricordando le proprieta' dei proiettori

$$\mathcal{I} = \sum_{n=1}^{4} \mathcal{P}_n$$

si ha

$$\mathcal{A} = 3\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4$$

ove $\mathcal{P}_n$ e' il proiettore sul vettore $\mathbf{v}_n$ autovettore di $\mathcal{A}$. Usando il teorema spettrale si ha

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{3t}\mathcal{P}_1 + e^{-t}\mathcal{P}_2 + e^{-t}\mathcal{P}_3 + e^{-t}\mathcal{P}_4 = \left(e^{3t} - e^{-t}\right)\mathcal{P}_1 + e^{-t}\mathcal{I}\,.$$

Lo stesso risultato si puo' ottenere notando che $\mathcal{P}_1$ commuta con $\mathcal{I}$ quindi

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{-t}e^{4t\mathcal{P}_1}$$

ricordando che $\mathcal{P}_1^n = \mathcal{P}_1$ per $n = 2, 3, ...$ si ottiene facilmente

$$e^{4t\mathcal{P}_1} = \mathcal{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n t^n}{n!}\mathcal{P}_1 = \mathcal{I} + \left(e^{4t} - 1\right)\mathcal{P}_1\,.$$

Si ha quindi

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathcal{A}}\,\mathbf{x}(0)\,.$$

Affinche' $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ il vettore $\mathbf{x}(0)$ deve essere ortogonale a $\mathbf{v}_1$ quindi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\,.$$

Soluzione Es. 4

E' immediato scrivere $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \int P(x_1)P(x - x_1)\,dx_1$$

passando in trasformata di Fourier e ricordando le proprieta' della convoluzione si ha

$$\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}\left(\hat{P}(k)\right)^2$$

ove

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx}\, dx \ , \ \hat{P}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int P(x) e^{-ikx}\, dx \, .$$

Il calcolo di $\hat{P}(k)$ e' elementare:

$$\hat{P}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ik+1)} \ ,$$

si ha quindi

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ik+1} \right)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ikx}}{(ik+1)^2}\, dk$$

l'integrale e' facile basta usare la formula di Cauchy:

$$f(x) = \Theta(x)\, x\, e^{-x} \, .$$