Esame 9 Febbraio 2022

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2020-2021

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
9 Feebraio 2022

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (8 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+4)}\,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (7 pt)
La funzione analitica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sul segmento dell'asse reale $4 \leq x \leq 5$ vale

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{6}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{3^{n+1}}{x^{n+2}}\,, \qquad v(x,0) = 0\,. \tag{2}$$

Calcolare la funzione $f(z)$ in $z = 1+i$.

Esercizio 3 (7 pt)
Data l'equazioni differenziale

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{x} \in R^5 \tag{3}$$

ove

$$A_{ij} = 1 - 3\delta_{ij} \tag{4}$$

a) calcolare $\mathbf{x}(t)$ dato $\mathbf{x}(0)$
b) determinare la condizione che deve soddisfare $\mathbf{x}(0)$ in modo tale che

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$$

Esercizio 4 (8 pt)
Si consideri l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) - \partial_x f(x,t) - f(x,t) + \delta(x)\delta(t) \tag{5}$$

con x sulla retta e condizione iniziale

$$f(x, t=-0.5) = 0 \tag{6}$$

calcolare $f(x,t)$.

Soluzione Es. 1

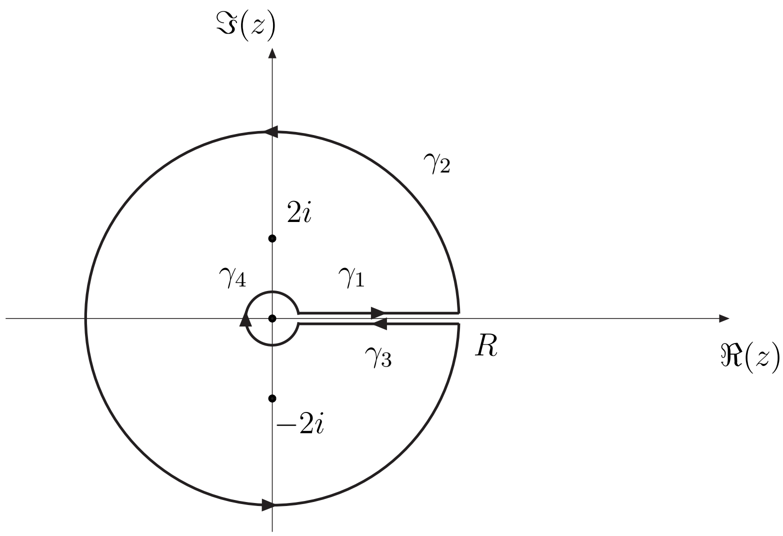
Per fare l'integrale I consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z^2+4)}\,. \tag{7}$$

$f(z)$ ha un taglio che parte da $z=0$, dovuto alla radice, e due poli semplici in

$$z = \pm 2i\,. \tag{8}$$

Poniamo il taglio della radice sul cammino d'integrazione e consideriamo il cammino in figura.



Facendo l'integrale su $\Gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$, si può applicare il teorema dei residui:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\ \left[\mathrm{Res}\,(f,-2i) + \mathrm{Res}\,(f,2i)\right]\,, \tag{9}$$

dove

$$\mathrm{Res}\,(f,-2i) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{-2i}4i} = \frac{i}{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{3}{4}\pi}\,, \tag{10}$$

$$\mathrm{Res}\,(f,2i) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2i}4i} = -\frac{i}{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\,. \tag{11}$$

Per l'integrale su Γ si ha:

$$\lim_{R\to\infty,r\to0}\int_{\gamma_1} f(z) \;=\; \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+4)}dx\,, \tag{12}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z) \;=\; \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{R}(R^2e^{i2\theta}+4}\,iRe^{i\theta}\,d\theta = 0\,, \tag{13}$$

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_{\gamma_3} f(z) = \int_{\infty}^{0}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}(x^2+4)}\right)dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x^2+4)}dx\,, \tag{14}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_4} f(z) = \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{r}(r^2e^{i2\theta}+4)}\,ire^{i\theta}\,d\theta = 0\,. \tag{15}$$

In totale quindi si ha

$$2\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x^2+4)}dx = 2\pi i\,\left[\frac{i}{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{3}{4}\pi}-\frac{i}{4\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2} \tag{16}$$

e quindi

$$I = \frac{\pi}{4}\,. \tag{17}$$

Soluzione Es. 2

Sul segmento $3 < x < 6$ la somma delle due serie è uniformemente convergente e trattandosi di serie geometriche si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n = \frac{6}{6-x}\,, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{3^{n+1}}{x^{n+2}} &= \sum_{k=1}^{\infty}k\frac{3^k}{x^{k+1}} = -\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{3}{x}\right)^{k-1}\left(-\frac{3}{x^2}\right)\,,\\ &= -\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^k = -\frac{d}{dx}\frac{x}{x-3} = \frac{3}{(x-3)^2}\,.\end{aligned} \tag{19}$$

Quindi

$$u(x,y) = \frac{6}{6-x}-\frac{3}{(x-3)^2} = \frac{6x^2-33x+36}{(x-3)^2(6-x)}\,. \tag{20}$$

La funzione che sui reali si riduce a $u(x,y)$ con $v(x,y)=0$ è

$$f(z) = \frac{6z^2-33z+36}{(z-3)^2(6-z)}\,, \tag{21}$$

continuazione analitica della $f(x)=u(x,y)$ all'intero piano complesso. Si ha

$$f(1+i) = \frac{258-81i}{325}\,. \tag{22}$$

Soluzione Es. 3

Possiamo scrivere

$$\mathcal{A} = 5\mathcal{P}_{\mathcal{I}} - 3\mathcal{I}$$

ove $\mathcal{I}$ e' la matrice identita' e $\mathcal{P}_1$ ha tutti gli elementi $1/5$ ed e' il proiettore sul vettore $\mathbf{v}^{(1)}$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \Big(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)$$

.
Usando la proprieta'

$$\mathcal{I} = \sum_{n=1}^{5} \mathcal{P}_n$$

ove $\mathcal{P}_n$ sono proiettori su vettori tra loro ortogonali, abbiamo

$$\mathcal{A} = 2\mathcal{P}_1 - 3\mathcal{P}_2 - 3\mathcal{P}_3 - 3\mathcal{P}_4 - 3\mathcal{P}_5 \,.$$

Dal teorema spettrale si ha

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{2t}\mathcal{P}_1 + e^{-3t}\mathcal{P}_2 + e^{-3t}\mathcal{P}_3 + e^{-3t}\mathcal{P}_4 + e^{-3t}\mathcal{P}_5 = \left(e^{2t} - e^{-3t}\right)\mathcal{P}_1 + e^{-3t}\mathcal{I}\,,$$

si ottiene lo stesso risultato anche notando che

$$e^{t\mathcal{A}} = e^{-3t}\, e^{5t\mathcal{P}_1} \quad , \quad e^{5t\mathcal{P}_1} = \mathcal{I} + \mathcal{P}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5t)^n}{n!} = \mathcal{I} + (e^{5t} - 1)\mathcal{P}_1$$

si ha quindi

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathcal{A}}\mathbf{x}(0)\,.$$

Per avere $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ il vettore $\mathbf{x}(0)$ deve essere perpendicolare a $\mathbf{v}^{(1)}$, in pratica

$$(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}^{(1)}) = \sum_{n=1}^{5} x_n(0) v_n^{(1)} = 0\,,$$

quindi la condizione iniziale deve soddisfare

$$\sum_{n=1}^{5} x_n(0) = 0\,.$$

Soluzione Es. 4

Nell'intervallo $t \in (-0.5, -\epsilon)$ si ha $f(x,t) = 0$, usando le proprieta' della delta di Dirac al tempo $t = \epsilon$ si ha

$$f(x,\epsilon) = \delta(x)\,.$$

Per $t > 0$ il problema si riduce all'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) - \partial_x f(x,t) - f(x,t)$$

e condizione iniziale

$$f(x,0) = \delta(x)\;.$$

Usando la trasformata di Fourier si ottiene

$$\frac{d}{dt}\hat{f}_k(t) = (-k^2 - ik - 1)\hat{f}_k(t)\;,\; \hat{f}_k(t) = e^{(-k^2-ik-1)t}\hat{f}_k(0)$$

ricordando la trasformata di Fourier della gaussiana, della delta di Dirac e le proprieta' delle trasformate delle trasformate di Fourier si ottiene

$$f(x,t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-t)^2}{4t}}\;.$$