Compito 9 Settembre 2016

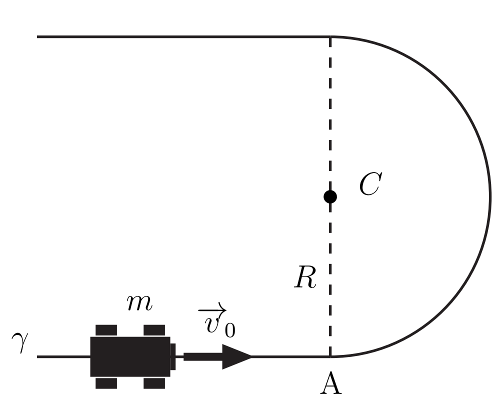
Roberto Bonciani e Paolo Dore

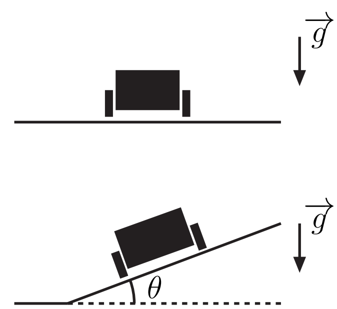
Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica Generale I per matematici
9 Settembre 2016

R. Bonciani, P. Dore

Esercizio 1





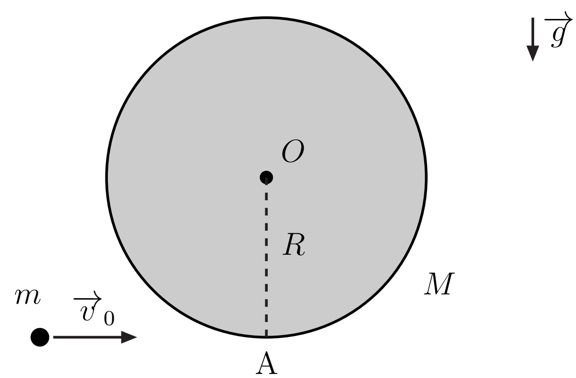
Un'auto (che per i nostri scopi può essere approssimata ad un punto materiale) di massa m procede di moto uniforme sulla traiettoria piana γ (vedi figura di sinistra, dove la traiettoria piana è vista dall'alto) con velocità in modulo pari a v_0. In A entra in una curva semicircolare di raggio R e centro C.

1. Supponendo che il fondo stradale lungo la curva sia orizzontale (vedi figura in alto a destra), quale deve essere il coefficiente d'attrito minimo μ_0 affinché l'auto rimanga, senza derapare, sulla curva?

2. Supponiamo adesso che il coefficiente d'attrito fra auto e asfalto sia μ_1 e che il modulo della velocità alla quale l'auto procede sia v_1. Trovare la pendenza minima della strada lungo la curva che faccia in modo da far percorrere all'auto la curva stessa.

Dati numerici: $v_0 = 1$ m/s, $R = 60$ cm, $m = 1$ kg, $\mu_1 = 0.2$, $v_1 = 2$ m/s.

Esercizio 2



Un disco omogeneo di massa M, raggio R è vincolato a ruotare senza attrito attorno al centro O, su un piano verticale, in presenza di gravità ed è fermo quando viene urtato anelasticamente da un proiettile di massa m e velocità $\vec{v}_0$, diretta come in figura. Nell'urto, il proiettile si conficca sul bordo del disco, nel punto A, a distanza R dal centro O e lungo la verticale che passa per O e non se ne distacca più.

1. Si calcoli la velocità angolare del sistema disco + proiettile subito dopo l'urto anelastico.
2. Qual'è il valore minimo di v_0, v_{0min}, affinché il sistema compia dopo l'urto una rotazione di almeno π (proiettile che raggiunge la posizione verticale)?

Dati numerici: $v_0 = 10\ m/s$, $R = 60$ cm, $m = 0.1$ kg, $M = 1$ kg.

Esercizio 3

Una massa di 9 g d'acqua (corrispondente ad un numero di moli $n = 0.5$) alla temperatura iniziale di $T_i = 20°$C viene trasformata in vapore alla temperatura finale $T_f = 300°$C. Definendo la temperatura intermedia $T_0 = 100°$C, si assumano i seguenti punti:

- tutte le trasformazioni avvengono a pressione atmosferica (costante);
- nel riscaldamento fra T_i e T_0 l'acqua non varia apprezzabilmente di volume ed il suo calore specifico rimane costante, pari a $c_V = 1$ cal/(g °K);
- a T_0 il calore latente di evaporazione dell'acqua è $\lambda = 328$ cal/g;
- nel riscaldamento fra T_0 e T_f il calore specifico molare del vapore acqueo a pressione costante varia secondo la legge $c_p = a + bT + cT^2$, dove $a = 8.8$ cal/(mol °K), $b = -1.9\ 10^{-3}$ cal/(mol °K^2), $c = -2.2\ 10^{-6}$ cal/(mol °K^3).

Calcolare:

1. le quantità di calore Q_1, Q_2, Q_3 scambiate dal sistema nelle tre trasformazioni;
2. la variazione di entropia del sistema nel passaggio da T_i a T_f.

Soluzione Esercizio 1

1. La forza centripeta che tiene l'auto sulla curva circolare è la forza d'attrito statico e deve avere modulo

$$f_c = m\frac{v_0^2}{R} = 1.67 \text{ N}\,. \tag{1}$$

Siccome si tratta di attrito statico, si ha

$$f_c \le \mu_S N\,, \tag{2}$$

dove $N = mg$. In totale

$$m\frac{v_0^2}{R} \le \mu_S N = \mu_S mg\,, \tag{3}$$

e quindi

$$\mu_S \ge \mu_{S\,min} = \frac{v_0^2}{gR} = 0.17\,. \tag{4}$$

2. Conviene ragionare in un sistema di riferimento (non inerziale) centrato in C e che ruoti solidalmente all'auto. In tale sistema dobbiamo imporre l'annullarsi delle forze che agiscono sull'auto. Prendiamo l'asse delle x orizzontale con verso uscente da C e l'asse delle y verticale. Abbiamo:

$$f_c - N\sin\theta - f_t\cos\theta = 0\,, \tag{5}$$
$$N\cos\theta - mg - f_t\sin\theta = 0\,. \tag{6}$$

La situazione di minimo θ corrisponde all'avere la forza d'attrito (statico) al suo massimo valore

$$f_t = \mu_1 N\,. \tag{7}$$

Inoltre si ha

$$f_c = m\frac{v_1^2}{R} = 6.67 \text{ N}\,. \tag{8}$$

Risolviamo il sistema (5,6) per ottenere N e θ. Dalla seconda equazione otteniamo

$$N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta}\,, \tag{9}$$

che sostituita nella prima dà

$$f_c - mg\frac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta} = 0\,. \tag{10}$$

Escludiamo il valore per cui si annulla il denominatore della (10):

$$\tan\theta = \frac{1}{\mu_1} = 5\,, \tag{11}$$

ovvero

$$\theta \ne \arctan 5 = 1.37 = 78.69°\,. \tag{12}$$

Poniamo

$$K_c = \frac{f_c}{mg} = 0.68\,. \tag{13}$$

L'Eq. (10) diventa

$$K_c - \frac{\sin\theta + \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta} = 0\,, \tag{14}$$

ovvero

$$(K_c - \mu_1)\cos\theta - (K_c\mu_1 + 1)\sin\theta = 0\,, \tag{15}$$

che ammette la soluzione

$$\theta = \arctan\frac{(K_c - \mu_1)}{(K_c\mu_1 + 1)} = 0.40 = 22.91^\circ\,, \tag{16}$$

che rispetta il vincolo in Eq. (12).

Soluzione Esercizio 2

1. L'urto è anelastico e quindi l'unica cosa che si conserva durante l'urto è il momento angolare rispetto a O. In O, infatti, sono concentrate le possibili reazioni vincolari e prendendo O come centro di riduzione, queste non danno contributo. Prima dell'urto si ha

   $$L_i = m v_0 R\,, \tag{17}$$

   e dopo l'urto si ha

   $$L_f = I_0\omega_0 + mR^2\omega = (I_O + mR^2)\omega\,, \tag{18}$$

   dove il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse perpendicolare al piano del moto passante per il centro O è:

   $$I_O = \frac{1}{2}MR^2\,. \tag{19}$$

   Siccome $L_i = L_f$, si trova:

   $$\omega = \frac{m\,v_0 R}{(I_0 + mR^2)} = \frac{2m\,v_0}{(M+2m)R} = 2.78\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{20}$$

2. Dopo l'urto il sistema è unito e parte con velocità angolare pari ad ω_0. Siccome il vincolo è liscio e l'unica forza in gioco è la forza peso, che è conservativa, si può usare la conservazione dell'energia per determinare il valore minimo di v_0.

   All'istante iniziale abbiamo solo energia cinetica

   $$E_i = T_0 = \frac{1}{2}\tilde{I}_0\omega_0^2\,, \tag{21}$$

   dove

   $$\tilde{I}_0 = I_0 + mR^2 = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\,. \tag{22}$$

Possiamo prendere come valore minimo di v_0, e quindi di ω_0, quello che fa sì che il sistema si fermi esattamente dopo aver fatto un giro di π. In quella situazione l'energia cinetica è nulla e abbiamo solo energia potenziale. Il disco non subisce variazioni di energia potenziale, quindi è solo la massa m a dover essere contata:

$$E_f = V_\pi = 2mgR\,. \tag{23}$$

Per cui

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right) R^2 \omega_{0\,min}^2 = 2mgR\,. \tag{24}$$

Si ricava allora:

$$\omega_{0\,min} = \pm\sqrt{\frac{8mg}{(M+2m)R}} = 3.3\ \mathrm{s}^{-1} \tag{25}$$

dove abbiamo scelto il senso positivo come antiorario, e si deve avere $\omega > \omega_{0\,min}$.

Usando l'Eq. (20), si ha quindi:

$$v_{0\,min} = \frac{(M+2m)R}{2m}\omega_{0\,min} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2gR(M+2m)}{m}} = 11.89\ \mathrm{m/s}\,. \tag{26}$$

Soluzione Esercizio 3

Dividiamo il processo in tre parti: *i)* l'acqua viene portata dalla temperatura T_i alla temperatura T_0; *ii)* tutta la quantità d'acqua presente subisce una transizione di fase da liquido a vapore, alla temperatura T_0; *iii)* una volta che tutta l'aqua è evaporata, il vapore passa dalla temperatura T_0 alla T_f.

- *i)* Durante la prima trasformazione il volume dell'acqua non varia apprezzabilmente. Quindi non si fa lavoro meccanico e tutta l'energia spesa per riscaldare l'acqua va sotto forma di energia interna dell'acqua stessa. Si ha

$$Q_1 = \int_{T_i}^{T_0} mc_V\,dT = mc_V(T_0 - T_i) = 720\ \mathrm{cal} = 3014\ \mathrm{J}\,. \tag{27}$$

- *ii)* La seconda trasformazione è una transizione di fase. Dato quindi il calore latente λ, si ha

$$Q_2 = \lambda m = 2952\ \mathrm{cal} = 12356\ \mathrm{J}\,. \tag{28}$$

- *iii)* Nella terza trasformazione si riscalda il gas tenendolo a pressione costante. La quantità di calore fornita sarà quindi

$$\begin{aligned} Q_3 &= \int_{T_0}^{T_f} nc_p(T)\,dT = n\int_{T_0}^{T_f}(a + bT + cT^2)\,dT \\ &= na(T_f - T_0) + \frac{1}{2}nb(T_f^2 - T_0^2) + \frac{1}{3}nc(T_f^3 - T_0^3) = 740\ \mathrm{cal} = 3098\ \mathrm{J} \end{aligned} \tag{29}$$

Per quanto riguarda le entropie, quindi, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\Delta S_1 &= \int_{T_i}^{T_0} \frac{đQ}{T} = mc_V \int_{T_i}^{T_0} \frac{dT}{T} = mc_V \ln \frac{T_0}{T_i} = 2.17 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 9.09 \text{ J/}^\circ\text{K}\,, && (30)\\
\Delta S_2 &= \frac{Q_2}{T_0} = 7.91 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 33.11 \text{ J/}^\circ\text{K}\,, && (31)\\
\Delta S_3 &= \int_{T_0}^{T_f} \frac{đQ}{T} = \int_{T_0}^{T_f} nc_p(T)\,\frac{dT}{T} = n\int_{T_0}^{T_f} \left(\frac{a}{T} + b + cT\right)\,dT \\
&= na\ln\frac{T_f}{T_0} + nb(T_f - T_0) + \frac{1}{2}nc(T_f^2 - T_0^2) = 1.59 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 6.68 \text{ J/}^\circ\text{K}\,, && (32)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta S_{if} = 11.67 \text{ cal/}^\circ\text{K} = 48.88 \text{ J/}^\circ\text{K}\,. \tag{33}$$