Esame 9 Settembre 2021

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2020-2021

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
9 Settembre 2021

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^{-x} + e^{x}} dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Discutere le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^3}, \tag{2}$$

e calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{\gamma} f(z)\, dz \,, \tag{3}$$

dove $\gamma = -1 + e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta < 2\pi$.

Esercizio 3 (6 pt)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\mathcal{A}\mathbf{x} \;\;,\;\; \mathbf{x} \in R^2 \tag{4}$$

ove

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

a) trovare la soluzione $\mathbf{x}(t)$ in funzione delle condizioni iniziali se $0 < a < 1$,
b) discutere quando e' possibile avere soluzioni limitate nel caso $a > 1$.

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la $f(x)$ tale che $f(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$, che soddisfa l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_1(z) g_1(t) \delta(x - y - z - t)\, dy\, dz\, dt = g_2(x) \tag{6}$$

ove

$$g_1(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \;\;,\;\; g_2(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \;\;,\;\; \sigma^2 \leq 1/2 \tag{7}$$

Soluzione Es. 1

L'integrale è la parte reale di

$$I = \Re I' = \Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{e^{-x} + e^{x}} dx \,. \tag{8}$$

Per calcolare I' consideriamo

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^{-z} + e^{z}} \,, \tag{9}$$

funzione analitica in $\mathbb{C}$ tranne nei punti in cui si annulla il denominatore

$$e^{-z} + e^{z} = 0 \,, \tag{10}$$

ovvero

$$z = i\frac{\pi}{2} + k\pi i \,, \tag{11}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Consideriamo il cammino $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ come segue

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= x \,, \qquad -R \le x \le R \,, & (12)\\
\gamma_2 &= R + iy \,, \qquad 0 \le y \le \pi \,, & (13)\\
\gamma_3 &= x + i\pi \,, \qquad R \ge x \ge -R \,, & (14)\\
\gamma_4 &= -R + iy \,, \qquad \pi \ge y \ge 0 \,. & (15)
\end{aligned}$$

La funzione $f(z)$ ha una singolarità polare in $z = z_0 = i\frac{\pi}{2}$, interna al cammino γ, quindi per il teorema dei residui abbiamo

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_0) = 2\pi i \,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2i} = \pi e^{-\frac{\pi}{2}} \,. \tag{16}$$

Inoltre

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \,, \tag{17}$$

dove

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\, dz &= I' & (18)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\, dz &= \int_0^{\pi} \frac{e^{iR-y}}{e^{-R-iy} + e^{R+iy}} \, i\, dy \to 0 & (19)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} f(z)\, dz &= e^{-\pi} \int_R^{-R} \frac{e^{ix}}{e^{-x-i\pi} + e^{x+i\pi}} dx = e^{-\pi} I' & (20)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\, dz &= \int_\pi^{0} \frac{e^{-iR-y}}{e^{-R+iy} + e^{R-iy}} \, i\, dy \to 0 \,. & (21)
\end{aligned}$$

In totale si ha

$$(1 + e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{e^{-x} + e^{x}} dx = \pi e^{-\frac{\pi}{2}} \tag{22}$$

e prendendone la parte reale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^{-x} + e^{x}} dx = \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{(1 + e^{-\pi})} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)} \, . \tag{23}$$

Soluzione Es. 2

la $f(z)$ è analitica tranne nei punti in cui si annulla il denominatore

$$z = -1 \, , \tag{24}$$

dove ha un polo del terzo ordine. Il punto all'infinito è invece un punto regolare per $f(z)$ come si vede studiando in $\omega = 1/z = 0$ la funzione

$$f(\omega) = \frac{\omega^3 \cos\left(\frac{\pi}{\omega}\right)}{(\omega + 1)^3} \, . \tag{25}$$

Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, -1) = 2\pi i \, \frac{1}{2!} \, \frac{d^2}{dz^2} \left(f(z)(z+1)^3 \right) \Big|_{z=-1} = 2\pi i \, \frac{1}{2} \pi^2 = \pi^3 i \, . \tag{26}$$

Soluzione Es. 3

La matrice $\mathcal{A}$ ha autovalori ed autovettori:

$$\lambda_1 = 1 + a \ , \ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_2 = 1 - a \ , \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \, .$$

Possiamo scrivere

$$\mathbf{x}(t) = a_1(t)\mathbf{v}_1 + a_2(t)\mathbf{v}_2$$

e' immediato vedere che i coefficienti $a_1(t)$ ed $a_1(t)$ soddisfano le equazioni

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} = -\lambda_n a_n \ ,$$

nel caso $0 < a < 1$, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ si hanno le equazioni per oscillatori armonici indipendenti:

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} = -\omega_n^2 a_n \ , \ \omega_n = \sqrt{\lambda_n}$$

che sono facilmente risolvibili in termini di funzioni trigonometriche etc etc
Se $a > 1$ allora $\lambda_2 < 0$ quindi per a_2 non si hanno piu' soluzioni trigonometriche ma

$$a_2(t) = A e^{+\sqrt{a-1}\, t} + B e^{-\sqrt{a-1}\, t}$$

quindi si hanno soluzioni limitate solo per particolari condizioni iniziali corrispondenti a $A = 0$.

Soluzione Es. 4

Indicando con G la convoluzione di g_1 con se stessa, si ha

$$\int f(y)G(x-y)dy = g_2(x) \ ,$$

passando in trasformata di Fourier ed usando il teorema di convoluzione

$$G(x-y) = \frac{e^{-\frac{(x-y-2m)^2}{4\sigma^2}}}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} \ .$$

Utilizzando ancora il teorema di convoluzione si ha

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-M)^2}{2\Sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} \ \ con \ \ M = -2m \ , \ \Sigma^2 = 1 - 2\sigma^2 \ se \ \sigma^2 < 1/2$$

mentre se $\sigma^2 = 1/2$ si ha

$$f(x) = \delta(x - M) \ .$$