Esame 10 Luglio 2019

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

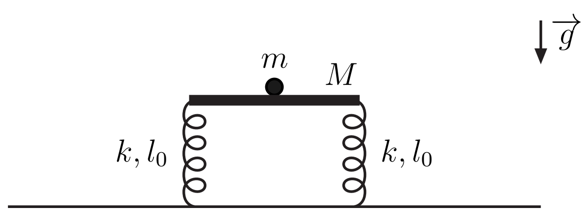
Anno Accademico 2018-2019

Esame 10 Luglio 2019

R. Bonciani e P. Dore

Esercizio 1

Un'asta omogenea di massa $M = 0.3$ kg è fissata al suolo per mezzo di due molle ideali identiche di lunghezza a riposo $l_0 = 0.2$ m e di costante elastica $k = 220$ N/m, agganciate in corrispondenza dei suoi estremi. Al centro dell'asta è posto in quiete un punto materiale di massa $m = 0.2$ kg (vedi figura). Il sistema, immerso nel campo di gravità, viene inizialmente compresso in maniera che le molle abbiano una lunghezza praticamente nulla e il punto materiale sia quindi ad un'altezza dal suolo nulla, $h = 0$ m. Quindi il sistema viene lasciato libero.

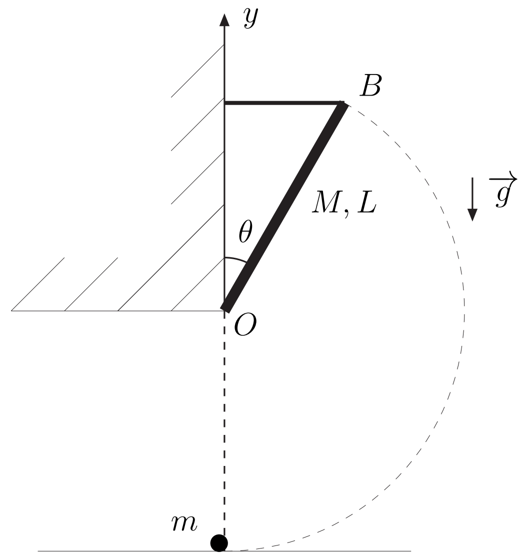


Determinare:

1. l'andamento della reazione vincolare **R** che agisce sul punto materiale, in funzione dell'altezza h di quest'ultimo dal suolo, deducendo poi per quale valore dell'altezza si ha il distacco del punto m dall'asta;
2. la velocità del punto m al momento del distacco;
3. l'altezza massima raggiunta dal punto m.

Esercizio 2

Un'asta sottile omogenea di massa $M = 2.3$ kg e lunghezza $L = 0.7$ m è vincolata a ruotare senza attrito attorno all'asse passante per il suo estremo O, perpendicolare al piano del moto. L'asta è inizialmente fissata al muro tramite una corda ideale disposta orizzontalmente in modo tale che l'asta formi con la verticale un angolo di $\theta = \pi/6$. Il sistema è immerso nel campo di gravità.



1. Si determini la tensione della corda.

2. Successivamente la corda viene tagliata e sotto l'azione della forza di gravità l'asta ruota fino ad urtare in modo completamente anelastico il punto materiale di massa $m = 0.4$ kg col suo estremo B (vedi figura). Si determini la velocità angolare dell'asta immediatamente prima dell'urto.

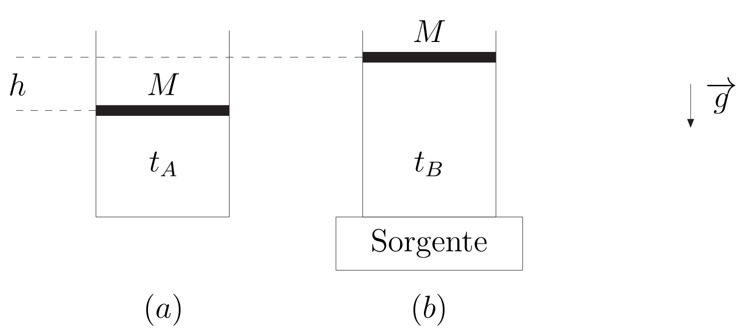
3. Si determini l'energia dissipata nell'urto.

Esercizio 3

In un ambiente in cui è stato fatto il vuoto, si trova un cilindro munito di pistone contenente 15 g di azoto (N_2, peso molecolare $M_{N_2} = 28$) a temperatura $t_A = 20$°C, in equilibrio col pistone di massa M (vedi figura (a)), nel campo di gravità. Mettendo direttamente a contatto il cilindro con una sorgente a temperatura $t_B = 111$°C il pistone si alza di $h = 20$ cm (vedi figura (b)). Supponendo che gli stati iniziale e finale del gas, considerato perfetto, siano stati di equilibrio, calcolare

1. il calore fornito al gas nella trasformazione $A \to B$;

2. la massa M del pistone (trascurando gli attriti fra pistone e cilindro).



Soluzione esercizio 1

1. Le forze e le accelerazioni sono tutte nella direzione dell'asse delle y. Prendendo il verso positivo verso l'alto, ponendo la stessa accelerazione per m e per M, possiamo scrivere il secondo Principio per il punto materiale e per l'asta separatamente:

$$\begin{aligned} R - mg &= m\ddot{y}\,, && (1) \\ -2k(y - l_0) - R - Mg &= M\ddot{y}\,, && (2) \end{aligned}$$

   da cui si ricava la reazione vincolare R in $y = h$ e l'equazione del moto:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{2k}{m+M}(y - l_0) - g\,, && (3) \\ R &= m\ddot{y} + mg = \frac{2m}{m+M}\,k\,(l_0 - h)\,. && (4) \end{aligned}$$

   Il punto materiale si staccherà dall'asta quando $R = 0$, ovvero per $h = l_0$.

2. Possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica per trovare $v(h)$:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 + (m+M)gl_0 = kl_0^2\,, \tag{5}$$

   da cui

$$v = \sqrt{\frac{2kl_0^2}{m+M} - 2gl_0} = 7.1\ \mathrm{m/s}\,. \tag{6}$$

3. Utilizzando ancora una volta la conservazione dell'energia meccanica, si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgl_0 = mgh_{max}\,, \tag{7}$$

   da cui

$$h_max = l_0 + \frac{v^2}{2g} = \frac{kl_0^2}{g(m+M)} = 2.8\ \mathrm{m}\,. \tag{8}$$

Soluzione esercizio 2

1. Per trovare la tensione della fune basta utilizzare la seconda cardinale della statica rispetto al punto O. Detta T la tensione, si ha

$$T\,l\cos\theta - Mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0\,, \tag{9}$$

   da cui

$$T = \frac{Mg}{2}\tan\theta = 6.5\ \mathrm{N}\,. \tag{10}$$

2. Utilizzando la conservazione dell'energia meccanica si trova:

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 + Mg\frac{L}{2} = MgL\left(1+\frac{1}{2}\cos\theta\right), \tag{11}$$

con

$$I_O = M\frac{L^2}{3}, \tag{12}$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I_O}(1+\cos\theta)} = \sqrt{\frac{3g}{L}(1+\cos\theta)} = 8.86\ \mathrm{s}^{-1}. \tag{13}$$

3. Il momento angolare rispetto ad O è lo stesso subito prima e subito dopo l'urto. Si può quindi trovare la velocità angolare subito dopo l'urto dalla

$$I_O\omega = (I_O + mL^2)\omega', \tag{14}$$

da cui

$$\omega' = \frac{I_O}{I_O + mL^2}\omega = \frac{M}{M+3m}\omega = 5.82\ \mathrm{s}^{-1}. \tag{15}$$

L'energia dissipata si trova dalla differenza di energia cinetica subito prima e subito dopo l'urto

$$E_{diss} = \frac{1}{2}I_O\omega^2 - \frac{1}{2}(I_O + mL^2)\omega'^2 = \frac{3gLmM}{M+3m}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 5.05\ \mathrm{J}. \tag{16}$$

Soluzione esercizio 3

15 g di Azoto corrispondono a

$$n = 15/28 = 0.536\ \mathrm{moli}. \tag{17}$$

Siccome l'Azoto è da considerarsi come gas perfetto, si ha

$$p_A V_A = nRT_A, \tag{18}$$
$$p_B V_B = nRT_B. \tag{19}$$

Ma in A e in B la pressione del gas è la stessa, $p_A = p_B = p$, essendo dovuta solo alla forza Mg esercitata dal cilindro. Quindi si ha

$$p(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A). \tag{20}$$

1. Durante la trasformazione $A \to B$ per il Primo Principio si ha

$$\delta Q = dU + \delta L = n\,c_V\,dT + \delta L, \tag{21}$$

dove

$$c_V = \frac{5}{2}R. \tag{22}$$

Se $T_A = 293.15$ K e $T_B = 384.15$ K sono le temperature assolute dello stato A e dello stato B, rispettivamente, si ha

$$\Delta U_{AB} = n\, c_V\, \Delta T = \frac{5}{2} nR(T_B - T_A) = 1013.27 \text{ J}\,. \tag{23}$$

Il lavoro lo possiamo calcolare, tenendo conto del fatto che nell'espansione il gas compie lavoro contro la forza costante Mg, quindi

$$L_{AB} = Mgh = p(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A) = 405.3 \text{ J}\,. \tag{24}$$

In totale

$$Q_{AB} = \frac{5}{2} nR(T_B - T_A) + nR(T_B - T_A) = 1418.58 \text{ J}\,. \tag{25}$$

2. Essendo

$$L_{AB} = Mgh = p\,(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A)\,, \tag{26}$$

si ha

$$M = \frac{nR}{gh}(T_B - T_A) = 206.6 \text{ kg}\,. \tag{27}$$