Esame 10 Settembre 2020

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2019-2020

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
10 Settembre 2020 – Gruppo A in presenza

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es. 1 e 2 su uno ed Es. 3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo.

Esercizio 1 (9 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Calcolare i seguenti integrali utilizzando sia la formula integrale di Cauchy, che il teorema dei residui (giustificare i vari passaggi):

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2 - 1)^2} dz \,, \tag{2}$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}}{z(z+1)} dz \,, \tag{3}$$

dove $\gamma_1 = 1 + e^{i\theta}$ e $\gamma_2 = 1 + \frac{3}{2}e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$.

Esercizio 3 (5 pt)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x} \,, \tag{4}$$

ove

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

mostrare che la matrice

$$\mathcal{U}(t) = e^{t\mathcal{A}} \,, \tag{6}$$

che determina la soluzione, cioe'

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{U}(t)\mathbf{x}(0) \tag{7}$$

e' unitaria per ogni t.

Esercizio 4 (10 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -e^{-t} f(x,t) - t\partial_x f(x,t) \tag{8}$$

con $-\infty < x < \infty$ e con condizione iniziale

$$f(x,0) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} \,. \tag{9}$$

Soluzione Es. 1

Consideriamo la seguente funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} = \frac{1}{(z-1)(z-i)(z+i)}\,. \tag{10}$$

La $f(z)$ ha tre poli semplici in

$$z = 1\,, \quad z = \pm i\,. \tag{11}$$

Quindi c'è un polo semplice sul cammino d'integrazione e facciamo l'integrale in valor principale.

Consideriamo il cammino chiuso formato da $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ con

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= t\,, \quad -R \le t \le 1 - \epsilon\,, & (12)\\
\gamma_2 &= t\,, \quad 1 + \epsilon \le t \le R\,, & (13)\\
\gamma_3 &= 1 + \epsilon e^{i\theta}\,, \quad -\pi \le \theta \le 0\,, & (14)\\
\gamma_4 &= Re^{i\theta}\,, \quad 0 \le \theta \le \pi\,. & (15)
\end{aligned}$$

Il polo in $z = i$ è interno al cammino d'integrazione. Usando il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0} \int_\gamma \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} dz &= PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_3} \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} dz\,,\\
&\quad + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} dz\,,\\
&= 2\pi i\, Res(f, i)\,, & (16)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
Res(f, i) &= \lim_{z\to i} \frac{1}{(z-1)(z+i)} = -\frac{1-i}{4}\,, & (17)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} dz &= 0\,, & (18)\\
\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_3} \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} dz &= -\pi i\, Res(f, 1)\,, & (19)\\
Res(f, 1) &= \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2}\,. & (20)\\
& & (21)
\end{aligned}$$

In totale si ha

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = 2\pi i \left(-\frac{1-i}{4} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{2}\,. \tag{22}$$

Soluzione Es. 2

- La funzione
$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} = \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2(z-1)^2} \tag{23}$$
ha un polo singolo in $z = 1$ e in $z = -1$. La divergenza in $z = 1$ è interna al cammino di integrazione. Invece la
$$g(z) = \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2} \tag{24}$$
è analitica in $Int\{\gamma\}$.
Utilizzando il teorema dei residui abbiamo
$$I_1 = 2\pi i \, Res(f, 1)\,, \tag{25}$$
dove
$$f(z) \simeq -\frac{\pi}{4}\frac{1}{z-1} + ... \tag{26}$$
quindi
$$I_1 = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -i\frac{\pi^2}{2}\,. \tag{27}$$
Con la formula integrale di Cauchy abbiamo
$$g'(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz\,, \tag{28}$$
da cui
$$I_1 = 2\pi i \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2} = 2\pi i \lim_{z\to 1}\left(\frac{\pi\cos(\pi z)}{(z+1)^2} - \frac{2\sin(\pi z)}{(z+1)^3}\right) = -i\frac{\pi^2}{2}\,. \tag{29}$$

- La funzione
$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z(z+1)} \tag{30}$$
ha un polo in $z = 0$ e uno in $z = -1$. Il polo in $z = 0$ è interno al cammino d'integrazione. La funzione
$$g(z) = \frac{e^{z^2}}{(z+1)} \tag{31}$$
è analitica in $Int\{\gamma\}$.
Troviamo il residuo in $z = 0$:
$$f(z) \simeq \frac{1}{z} + z + ... \tag{32}$$
Quindi
$$I_2 = 2\pi i \, Res(f, 0) = 2\pi i\,. \tag{33}$$

Utilizzando la formula integrale di Cauchy abbiamo

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i} I_2 \,, \tag{34}$$

quindi

$$I_2 = 2\pi i \lim_{z \to 0} g(z) = 2\pi i \,. \tag{35}$$

Soluzione Es. 3

Si può procedere in 2 modi:
I - Calcolare in qualche modo $\mathcal{U}(t)$, si trova facilmente

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{36}$$

e si verifica che è unitaria.
II - Notando che l'equazione si può scrivere

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -x_1 \tag{37}$$

abbiamo un oscillatore armonico, per la conservazione dell'energia si ha

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = x_1(0)^2 + x_2(0)^2 \tag{38}$$

Soluzione Es. 4

Passando in trasformata di Fourier si ha

$$\frac{d}{dt} F(k,t) = e^{-t} F(k,t) - iktF(k,t) \tag{39}$$

$$F(k,t) = e^{-g(t)} e^{-ih(t)k} F(k,0) \tag{40}$$

ove $g(t) = \int_0^t e^{-t'} dt' = 1 - e^{-t}$, $h(t) = t^2/2$.
Quindi

$$f(x,t) = e^{-g(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikx} e^{-ih(t)k} F(k,0) dk \tag{41}$$

ricordando che la trasformata di Fourier di $G(x-a)$ è la trasformata di $G(x)$ moltiplicata per e^{-ika}, si ha, senza dover calcolare esplicitamente $F(k,0)$:

$$f(x,t) = e^{-g(t)} f(x - h(t), 0) = e^{-g(t)} \frac{e^{-(x-h(t))^2}}{1 + (x - h(t))^2} \,. \tag{42}$$