Esame 11 Settembre 2020

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2019-2020

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
11 Settembre 2020 – Gruppo B in remoto

Esercizio 1 (9 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1} dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Calcolare i seguenti integrali utilizzando sia la formula integrale di Cauchy, che il teorema dei residui (giustificare i vari passaggi):

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{2\sinh(z)}{z^4} \,, \tag{2}$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} \,, \tag{3}$$

dove $\gamma_1 = e^{i\theta}$ e $\gamma_2 = -1 + 3e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Esercizio 3 (5 pt)
Data la matrice $N \times N$

$$\mathcal{A} = a\mathcal{P}_1 + b\mathcal{P}_2 \tag{4}$$

ove $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sono proiettori tra loro ortogonali, $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = 0$, si discuta per quali valori di a e b esiste la matrice inversa $\mathcal{A}^{-1}$ per $N = 2$ e $N \geq 3$.

Esercizio 4 (10 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial^4_{xxxx} f(x) + f(x) = \cos x - (\sin x)^2 \tag{5}$$

con condizione al bordo

$$f(0) = f(\pi) \;,\; f'(0) = f'(\pi) \,. \tag{6}$$

Soluzione Es. 1

L'integrando è pari, quindi possiamo considerare

$$\tilde{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = 2I\,. \tag{7}$$

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}\,, \tag{8}$$

analitica ovunque nel piano complesso tranne nei punti

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}\,, \qquad k = 0,1,2,3\,. \tag{9}$$

Consideriamo il cammino chiuso formato dal segmento γ_1 sull'asse reale, $-R \le x \le R$, e dalla semicirconferenza $\gamma_2 = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. I due poli semplici $k = 0,1$ sono interni al percorso $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Per il teorema dei residui abbiamo

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma \frac{z^2}{z^4+1} dz = 2I + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{z^4+1} dz = 2\pi i\ \left(Res(f,z_0) + Res(f,z_1)\right)\,, \tag{10}$$

dove

$$\begin{aligned}
Res(f,z_0) &= \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)\,, & (11)\\
Res(f,z_1) &= -\frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\,, & (12)\\
\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{z^4+1} dz &= 0\,. & (13)
\end{aligned}$$

In totale

$$I = \frac{1}{2}\left[2\pi i \frac{1}{4}\ \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\,. \tag{14}$$

Soluzione Es. 2

- La funzione

  $$f(z) = \frac{2\sinh(z)}{z^4} \tag{15}$$

  ha un polo terzo all'interno del cammino d'integrazione. Mentre la

  $$g(z) = 2\sinh z \tag{16}$$

  è analitica ovunque.

  Per la formula integrale di Cauchy abbiamo

  $$g'''(0) = \frac{3!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{2\sinh(w)}{w^4} dw\,, \tag{17}$$

quindi

$$\int_\gamma \frac{2\sinh(z)}{z^4}dz = \frac{1}{3}\pi i \ \left(2\sinh(z)\right)'''|_0 = \frac{2}{3}\pi i \cosh(0) = \frac{2}{3}\pi i\,. \tag{18}$$

Cerchiamo il residuo di $f(z)$, sviluppando in un intorno di $z=0$:

$$f(z) \simeq \frac{2}{z^3} + \frac{1}{3z} + ... \tag{19}$$

Quindi, per il teorema dei residui, si ha

$$\int_\gamma \frac{2\sinh(z)}{z^4}dz = 2\pi i Res(f,0) = \frac{2}{3}\pi i\,. \tag{20}$$

- La funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} = \frac{e^z}{4}\left(\frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{(z+3)^2} - \frac{4}{(z+3)}\right) \tag{21}$$

ha due poli in $z=-3$ e $z=1$, entrambi interni al cammino d'integrazione.
Utilizzando il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz = 2\pi i\left(\lim_{z\to1}\frac{e^z}{(z+3)^2} - \lim_{z\to-3}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{(z-1)}\right) = \frac{\pi i}{8}\left(e-5e^{-3}\right)\,. \tag{22}$$

Per utilizzare la formula integrale di Cauchy si può fare in diversi modi. Il più semplice è utilizzare la forma in fratti semplici della funzione:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz = \int_\gamma \frac{e^z}{4}\left(\frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{(z+3)^2} - \frac{4}{(z+3)}\right)dz\,. \tag{23}$$

Si ha

$$\int_\gamma \frac{e^z}{16(z-1)} = 2\pi i\lim_{z\to1}\frac{e^z}{16} = \frac{\pi i}{8}e\,, \tag{24}$$

$$\int_\gamma \frac{e^z}{4(z+3)^2} = 2\pi i\lim_{z\to-3}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{4} = \frac{\pi i}{2}e^{-3}\,, \tag{25}$$

$$\int_\gamma \frac{e^z}{16(z+3)} = 2\pi i\lim_{z\to-3}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{16} = \frac{\pi i}{8}e^{-3}\,. \tag{26}$$

In totale

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)}dz = \frac{\pi i}{8}\left(e-4e^{-3}-e^{-3}\right) = \frac{\pi i}{8}\left(e-5e^{-3}\right)\,. \tag{27}$$

Soluzione Es. 3

Per $N = 2$ abbiamo (teorema spettrale) che a e b sono gli autovalori, quindi l'inversa esiste se sia a che b non sono nulli.
Per $N \geq 3$ possiamo scrivere

$$\mathcal{A} = a\mathcal{P}_1 + b\mathcal{P}_2 + \sum_{n\geq 3} c_n \mathcal{P}_n \,, \tag{28}$$

ove $c_n = 0$, quindi ci sono sempre autovalori nulli, abbiamo che non esiste mai l'inversa.

Soluzione Es. 4

Usando le formule di Eulero scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{d^4}{dx^4} f(x) + f(x) = g(x) = -\frac{1}{2} + \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \tag{29}$$

Sviluppiamo $f(x)$ in serie di coseni (come ovvio dalle condizioni al bordo)

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1} a_n \cos nx \tag{30}$$

sostituendo dell'equazione abbiamo

$$a_n = \frac{g_n}{n^4 + 1} \tag{31}$$

ove i $\{g_n\}$ sono i coefficienti dello sviluppo di $g(x)$. Gli unici termini non nulli sono

$$g_0 = -\frac{1}{2} \ , \ g_1 = 1 \ , \ g_2 = \frac{1}{2} \ . \tag{32}$$