Esame 13 Settembre 2019

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2018-2019

Esame 13 Settembre 2019

R. Bonciani e P. Dore

Esercizio 1

Un punto materiale di massa $m_1 = 57$ g, inizialmente fermo, a $t = 0$ viene lasciato cadere nel vuoto da un'altezza $h = 100$m. Nello stesso istante (sempre $t = 0$) da $h = 0$ un altro punto materiale di massa $m_2 = 40$ g viene sparato in direzione verticale con velocità $v_0 = 55$ m/s verso m_1. Sia m_1 che m_2 sono soggetti alla forza peso.

1. Determinare il tempo t^* e l'altezza h^* in cui i due punti si incontrano;
2. L'urto che ne consegue è commpletamente anelastico (i due punti si uniscono). Si calcoli l'energia persa nell'urto.
3. Si calcoli l'altezza massima raggiunta dal sistema $m_1 + m_2$ dopo l'urto

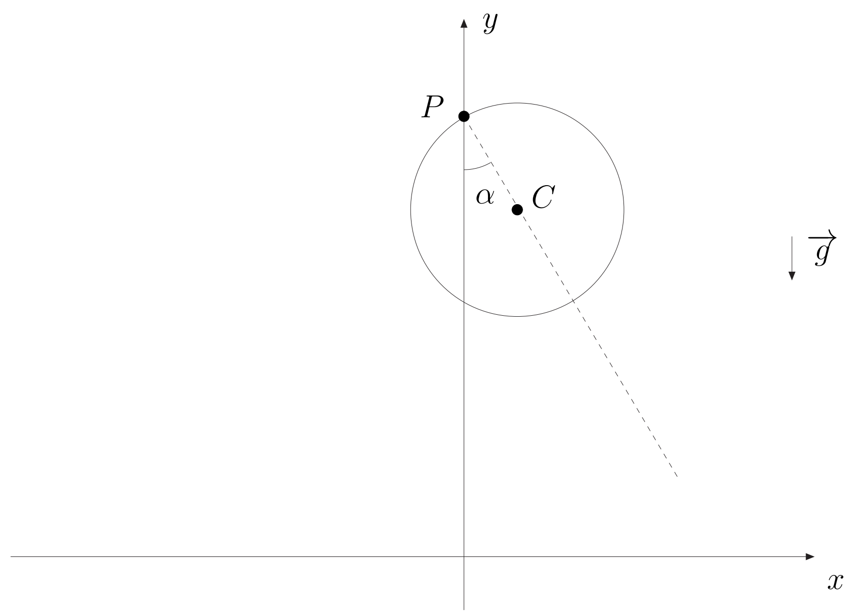
Esercizio 2

Un disco omogeneo di raggio $R = 10$ cm e massa $m = 1$ kg è ancorato alla parete tramite un perno P agganciato al suo bordo (vedi figura). Il perno è posto ad un'altezza dal suolo $h = 10.1$ m e il disco può oscillare attorno ad esso senza attrito.

1. Si determini il periodo delle piccole oscillazioni del sistema intorno alla posizione di equilibrio stabile.

Successivamente il disco viene mantenuto in quiete in modo che la retta passante per P e per il suo centro di massa C formi un ancolo $\alpha = 20°$ con la verticale. Una volta lasciato libero il disco ruota fino a raggiungere la sua posizione più bassa. In quel preciso istante il disco si stacca dal perno.

1. Si determini la velocità del centro di massa e la velocità angolare del disco al momento del distacco.
2. A quale distanza dalla verticale passante per il perno giunge il centro di massa del disco nel momento in cui esso tocca terra?



Esercizio 3

$n = 5$ moli di gas perfetto monoatomico sono racchiuse in un contenitore a pareti adiabatiche di volume $V_A = 10\,\mathrm{l}$ e sono inizialmente in equilibrio alla temperatura di $T_A = 300\,\mathrm{K}$. Il gas compie un'espansione libera e si porta nello stato di equilibrio B con $V_B = 2V_A$. Successivamente una compressione adiabatica reversibile porta il gas alla pressione iniziale, p_A, nello stato C.

1. Disegnare le due trasformazioni nel piano $p - V$ e in quello $T - S$.
2. Determinare le coordinate termodinamiche degli stati A, B e C.
3. Calcolare il lavoro fatto nelle due trasformazioni.
4. Calcolare la variazione di entropia del gas nelle due trasformazioni.

Soluzione esercizio 1

1. Le equazioni orarie dei due punti materiali sono le seguenti

$$y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{1}$$
$$y_2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{2}$$

   Imponendo che $y_1 = y_2$ si trova

$$t^* = \frac{h}{v_0} = 1.82 \text{ m/s}\,, \tag{3}$$
$$h^* = h - \frac{gh^2}{2v_0^2} = 83.79 \text{ m}\,. \tag{4}$$

2. La forza peso non è impulsiva. Di conseguenza, la quantità di moto del sistema immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto è la stessa:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f\,, \tag{5}$$

   dove quindi

$$v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{6}$$

   Le velocità v_1 e v_2 sono date da

$$v_1 = -gt^* = -\frac{gh}{v_0} = 17.84 \text{ m/s}\,, \tag{7}$$
$$v_2 = v_0 - gt^* = v_0 - \frac{gh}{v_0} = 37.16 \text{ m/s} \tag{8}$$

   Quindi

$$v_f = 4.84 \text{ m/s}\,. \tag{9}$$

   L'energia dissipata durante l'urto è

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = -35.55 \text{ J}\,. \tag{10}$$

3. Il sistema $m_1 + m_2$ parte da h^* con velocità iniziale v_f. L'equazione oraria è quindi

$$y = h^* + v_f t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{gh^2}{2v_0^2} + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}t - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{11}$$

   Il sistema raggiunge la massima altezza quando

$$v = \dot{y} = v_f - gt = 0\,, \tag{12}$$

   ovvero a

$$t_{max} = \frac{v_f}{g} = 0.49 \text{ s}\,, \tag{13}$$

   raggiungendo la seguente quota

$$h_{max} = h^* + v_f t_{max} - \frac{1}{2}gt_{max}^2 = h^* + \frac{v_f^2}{2g} = 84.98 \text{ m}\,. \tag{14}$$

Soluzione esercizio 2

1. Il sistema costituisce un pendolo fisico, per il quale l'equazione di moto è data dalla seconda cardinale calcolata rispetto al punto P:

$$I_P\ddot{\alpha} = -mgR\sin\alpha\,, \tag{15}$$

dove

$$I_P = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 = 0.015\ \text{kg m}^2\,. \tag{16}$$

In regime di piccole oscillazioni la (15) diventa

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgR}{I_P}\alpha = 0\,, \tag{17}$$

con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = 0.78\ \text{s}\,. \tag{18}$$

2. Utilizzando la conservazione dell'energia meccanica per trovare la velocità angolare ω del sistema nel punto più basso, si ha

$$\frac{1}{2}I_P\omega^2 = mgR(1-\cos\alpha_0)\,, \tag{19}$$

da cui, in modulo

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgR(1-\cos\alpha_0)}{I_P}} = \sqrt{\frac{4g(1-\cos\alpha_0)}{3R}} = 2.8\ \text{s}^{-1}\,. \tag{20}$$

La velocità del centro di massa C sarà, in direzione modulo e verso

$$\mathbf{v}_C = -\omega R\hat{\imath} \tag{21}$$

e il modulo è $v_C = 0.28$ m/s.

3. Quando il disco si distacca dal perno, il suo moto può essere studiato utilizzando la prima cardinale. L'unica forza esterna che agisce sul sistema è la forza peso. Quindi, per il centro di massa C possiamo scrivere (in un sistema cartesiano con l'asse delle y verso l'alto):

$$m\ddot{x}_C = 0\,, \tag{22}$$
$$m\ddot{y}_C = -mg\,, \tag{23}$$

con le condizioni iniziali

$$x_C(0) = 0\,,\quad \dot{x}_C(0) = -\omega R\,, \tag{24}$$
$$y_C(0) = h - R\,,\quad \dot{y}_C(0) = 0\,, \tag{25}$$

$$ \tag{26} $$

Il moto del centro di massa lungo l'asse delle x è uniforme

$$x_C(t) = -\omega R\, t\,, \tag{27}$$

mentre lungo le y abbiamo un moto accelerato di equazione oraria

$$y_C(t) = h - R - \frac{1}{2} g t^2\,. \tag{28}$$

Il disco toccherà il suolo quando $y_C = R$. Ricavando t dalla seconda equazione di ha

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}(h - 2R)} = 0.43 \text{ s} \tag{29}$$

e quindi

$$x = -\omega R \sqrt{\frac{2}{g}(h - 2R)} = 0.12 \text{ m}\,. \tag{30}$$

Soluzione esercizio 3

1. Plots
2. Lo stato A di partenza ha $T_A = 300$ K e un volume di $V_A = 10$ l. Utilizzando l'equazione di stato si ottiene

   $$p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 12.3 \text{ Atm} = 1.2463\ 10^6 \text{ Pa}\,. \tag{31}$$

   Nell'espansione libera A→B, si ha $\Delta L = 0$ e $\Delta Q = 0$, quindi per il primo principio anche $\Delta U = 0$ e $T_B = T_a = 300$ K. Il volume è $V_B = 2V_A = 20$ l e quindi

   $$p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_A}{2V_A} = \frac{1}{2} p_A = 6.15 \text{ Atm} = 6.2315\ 10^5 \text{ Pa}\,. \tag{32}$$

   La trasformazione B→C è un'adiabatica reversibile, quindi valgono le formule di Poisson. Per un gas perfetto monoatomico si ha

   $$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{5}{3}\,. \tag{33}$$

   Si ha $p_C = p_A = 12.3$ Atm $= 1.2463\ 10^6$ Pa. Quindi utilizzando la

   $$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma\,, \tag{34}$$

   si ottiene

   $$V_C = V_B \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_B \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_B \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}} = 13.20 \text{ l}\,. \tag{35}$$

   Poi

   $$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = 395.85 \text{ K}\,. \tag{36}$$

3. Si ha $L_{AB} = 0$ per l'espansione libera. Mentre invece, per il primo principio, si ha

$$L_{BC} = -\Delta U = (U_B - U_C) = nc_V(T_B - T_C) = n\frac{3}{2}R(T_B - T_C) = -5984.1 \text{ J}\,. \quad (37)$$

4. Per l'espansione libera si ha $T_A = T_B$. Allora per calcolare la variazione di Entropia, si può considerare una isoterma reversibile da A a B:

$$S_{AB} = \int_A^B \frac{đQ^{rev}}{T_A} = \frac{1}{T_A}\int_A^B pdV = \int_A^B nR\frac{dV}{V} = nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nR\ln 2 = 28.8 \text{ J/K}\,. \quad (38)$$

La trasformazione B→C è invece isoentropica, $\Delta S = 0$.