Esame 14 Febbraio 2019

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2018-2019

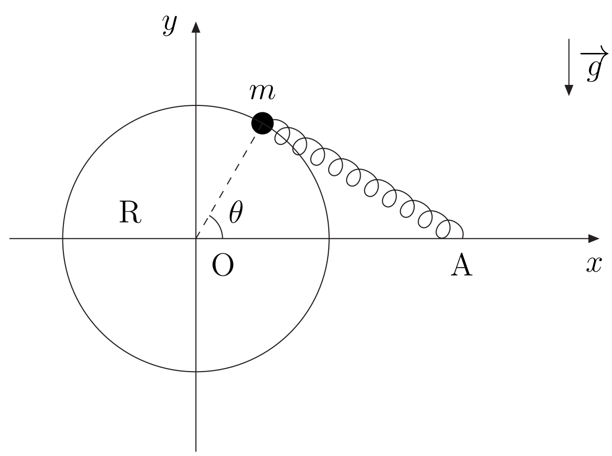
Regole per lo scritto:

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 3h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 3h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 2, 3 e 4 in 3h.

Esercizio 1

Un punto materiale di massa $m = 0.75$ kg è vincolato a muoversi senza attrito su una circonferenza di raggio $R = 1.1$ m che è posta in un piano verticale. Oltre che alla forza di gravità, il punto m è soggetto ad una forza di richiamo elastico, fornita da una molla, di lunghezza di riposo nulla e costante elastica $k = 3.2$ N/m, che collega il punto m ad un punto $A = (2R, 0)$ che dista $2R$ dal centro della circonferenza ed è posto sull'orizzontale (vedi figura).

1. Calcolare le posizioni di equilibrio.
2. Supponendo di lasciare da fermo il punto m da $(0, R)$, si calcoli la velocità di m quando transita dal punto $(R, 0)$
3. Indicare se le posizioni di equilibrio sono di equilibrio stabile o instabile.

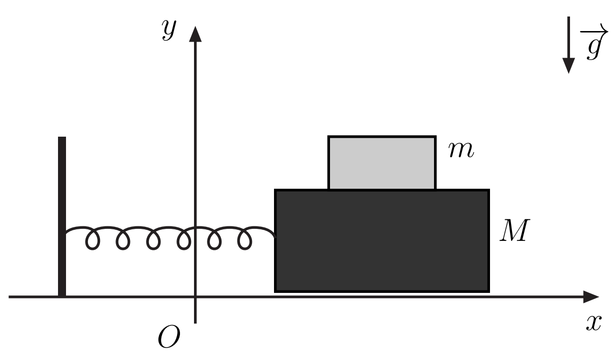


Esercizio 2*

Una blocco di massa $M = 1.2$ kg è vincolato a sctrisciare senza attrito sul pavimento sotto l'azione della forza di richiamo elastico data da una molla, di costante elastica $k = 1.2$ N/m e lunghezza di riposo in $x = 0$, che lo collega al muro (vedi figura). Sopra il blocco M viene posto un altro blocco, di massa $m = 0.66$ kg. Fra M e m c'è attrito, con coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.6$.

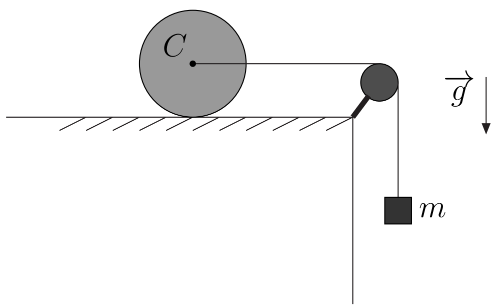
Determinare:

1. la massima ampiezza di oscillazione per la quale la massa m NON slitta su M;
2. Il periodo di oscillazione in tale condizione.



Esercizio 3*

Un disco omogeneo di massa $M = 7.3$ kg e raggio $R = 0.7$ m è vincolato a muoversi in un piano verticale. È appoggiato su una guida orizzontale scabra. L'attrito fra guida e disco è sufficiente a garantire il ritolamento puro del disco. Una fune ideale collega il centro del disco ad un blocchetto di massa $m = 5.1$ kg. La fune passa su una carrucola, capace di ruotare senza attrito, formata da un disco di raggio $r = 0.1$ m. La fune non può strisciare sulla carrucola. Vedi figura.



1. Consideriamo la carrucola come priva di massa. Lasciando il sistema da fermo, quale sarà la velocità di C quando il blocchetto m è sceso di una quota $h = 1.2$ m?

2. Se la carrucola ha massa $m_c = 2.2$ kg, come varia tale veocità?

Esercizio 4*

$n = 1.5$ moli di gas perfetto biatomico sono contenute in un cilindro di sezione $S = 1$ dm^2, chiuso superiormente da un pistone adiabatico di massa trascurabile. La pressione esterna è $p_A = 10^5$ Pa e il gas è all'equilibrio alla temperatura $T_A = 300$ K. Si poggia sul pistone un oggetto di massa $m = 20$ kg e si attende che si raggiunga il nuovo stato di equilibrio B. La trasformazione AB è adiabatica. Il gas viene successivamente scaldato reversibilmente in maniera isocora fino alla temperatura $T_C = 400$ K. Viene poi compiuta un'espansione isoterma reversibile fino allo stato D con volume $V_D = V_A$. Un raffreddamento isocoro reversibile riporta infine il gas nello stato iniziale A.

1. Si disegni il ciclo nel piano di Clapeyron.

2. Si determini la temperatura T_B dello stato B.

3. Si determini il rendimento del ciclo.

Soluzione Esercizio 1

1. Il punto materiale è soggetto alla forza peso e alla forza di richiamo elastico, che sono conservative, e alla reazione vincolare che, essendo il vincolo liscio, è normale alla circonferenza e quindi perpendicolare allo spostamento e non fa lavoro. Il computo energetico, quindi, consta delle sole due forze conservative.

   Per avere informazioni sulla stabilità del punto di equilibrio, si procede studiando l'energia potenziale.

   Per la forza peso si può prendere come zero dell'energia potenziale per esempio il punto più basso della circonferenza. Si ha quindi

$$V_g = mgR(1+\sin\theta)\,. \tag{1}$$

   Per la forza di richiamo elastico, detta L la distanza del punto m da A, si ha

$$V_{el} = \frac{1}{2}kL^2\,. \tag{2}$$

   Per il teorema di Carnot (dei coseni), si ha

$$L^2 = R^2 + (2R)^2 - 2R(2R)\cos\theta = R^2(5-4\cos\theta) \tag{3}$$

   e quindi

$$V_{el} = \frac{1}{2}kR^2(5-4\cos\theta)\,. \tag{4}$$

   In totale

$$V = V_g + V_{el} = mgR(1+\sin\theta) + \frac{1}{2}kR^2(5-4\cos\theta)\,. \tag{5}$$

   Estremando la funzione $V(\theta)$ si trova

$$0 = \frac{dV}{d\theta} = mgR\cos\theta + 2kR^2\sin\theta\,, \tag{6}$$

   da cui

$$\tan\theta = -\frac{mg}{2kR}\,. \tag{7}$$

   Quindi si trovano le due soluzioni

$$\theta_1 = -\arctan\left(\frac{mg}{2KR}\right) = -0.81\ \text{rad} = -46.3^\circ\,, \tag{8}$$
$$\theta_2 = \pi - \arctan\left(\frac{mg}{2KR}\right) = 2.33\ \text{rad} = 133.7^\circ\,. \tag{9}$$

   Studiando la derivata seconda di $V(\theta)$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -mgR\sin\theta + 2kR^2\cos\theta\,, \tag{10}$$

   si trova che

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_1} > 0\,, \tag{11}$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_2} < 0\,, \tag{12}$$

Quindi $\theta = \theta_1$ è una posizione di equilibrio stabile, mentre $\theta = \theta_2$ instabile.

Si può risolvere il problema anche utilizzando l'equazione della statica (perdendo l'informazione sulla stabilità della posizione di equilibrio). In tal caso conviene proiettare le forze agenti sul punto m lungo le direzioni radiale $\hat{u}_r$ e tangenziale $\hat{u}_\theta$ alla circonferenza. Siccome la reazione vincolare $\mathbf{N}$ è diretta solamente lungo $\hat{u}_r$, l'equazione lungo $\hat{u}_r$ servirà per determinare $\mathbf{N}$, mentre l'equazione lungo $\hat{u}_\theta$ darà la condizione di equilibrio. Allora, detto γ l'angolo formato da L col raggio R, si ha

$$mg\cos\theta + kL\sin\gamma = 0\,. \tag{13}$$

Per costruzione geometrica, si ha che

$$L\sin\gamma = 2R\sin\theta \tag{14}$$

e quindi si riottiene (come deve essere) l'equazione (7).

2. Possiamo usare la conservazione dell'energia. Posto gli zeri dell'energia potenziale come nella domanda precedente, avremo che al momento iniziale l'energia del punto m è solo potenziale

$$E_{in} = mg2R + \frac{1}{2}k5R^2\,. \tag{15}$$

Nel punto di arrivo, invece abbiamo anche l'energia cinetica:

$$E_{fin} = mgR + \frac{1}{2}kR^2 + \frac{1}{2}mv^2\,, \tag{16}$$

dalle quali si ottiene

$$\|v\| = \sqrt{2gR + 4\frac{k}{m}R^2} = 6.5 \text{ m/s}\,. \tag{17}$$

Soluzione Esercizio 2

1. ome di consueto dividiamo il problema in due. Concentriamoci prima di tutto sul blocchetto di massa m. Questo sarà soggetto alla forza di gravità e alla forza di contatto $\mathbf{F}_t$, comunicatagli dal blocchetto di massa M e dovuta all'attrito che c'è fra i due blocchetti. Scomponendo l'equazione del moto lungo gli assi cartesiani si ha

$$F_N - mg = 0\,, \tag{18}$$

$$m\ddot{x}_1 = F_t\,, \tag{19}$$

con

$$|F_t| \le \mu_S|F_N| = \mu_S mg \tag{20}$$

nel caso statico. Per il blocco M, invece avremo

$$N - F_N - Mg = 0\,, \tag{21}$$

$$M\ddot{x}_2 = -F_t - kx_2\,. \tag{22}$$

Se vogliamo che il blocchetto m non strisci sul blocchetto M, si deve avere

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2\,. \tag{23}$$

Ne consegue che ($x_1 = x_2 = x$)

$$\frac{F_t}{m} = -\frac{F_t}{M} - \frac{k}{M}x\,. \tag{24}$$

Quindi affiché i due blocchetti procedano uno sull'altro si deve avere

$$F_t = \frac{m}{m+M}kx\,. \tag{25}$$

Per la (20)

$$\frac{m}{m+M}k|x| \leq \mu_S mg\,, \tag{26}$$

ovvero

$$-\mu_S g\frac{m+M}{k} \leq x \leq \mu_S g\frac{m+M}{k}\,, \tag{27}$$

con

$$x_{max} = \mu_S g\frac{m+M}{k} = 9.12\ \mathrm{m}\,. \tag{28}$$

2. Supponendo quindi $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$, l'equazione del moto è data da

$$(m+M)\ddot{x} + kx = 0\,, \tag{29}$$

moto armonico di pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = 0.8\ \mathrm{s}^{-1}\,, \tag{30}$$

e periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 7.82\ \mathrm{s}\,. \tag{31}$$

Soluzione Esercizio 3

Il problema si può affrontare con le cardinali e, siccome le uniche forze che fanno lavoro sono conservative, anche ricorrendo alla conservazione dell'energia. Discutiamo entrambi i modi.

1. Nel caso in cui la carrucola sia priva di massa, la tensione nei due tratti di corda è la stessa. Scomponiamo il sistema in due: il peso di massa m e la ruota. Per il primo si può scrivere

$$m\ddot{x} = mg - T\,, \tag{32}$$

dove abbiamo usato la coordinata x positiva nel verso dell'asse verticale discendente.

Per la ruota, possiamo considerare la seconda cardinale rispetto al punto di contatto, P, che è istantaneamente fermo, poiché la ruota rotola di rotolamento puro:

$$TR = I_P \ddot{\theta} \,, \tag{33}$$

dove

$$I_P = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \tag{34}$$

è il momento d'inerzia del disco rispetto a P.

Per il vincolo di rotolamento puro si ha

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_C}{R} \,. \tag{35}$$

Inoltre $\ddot{x} = \ddot{x}_C$. Quindi

$$mg - m\ddot{x} = \frac{I_P}{R}\ddot{x} \,, \tag{36}$$

da cui si ricava

$$\ddot{x} = a = \frac{mR^2}{mR^2 + I_P} g = \frac{2m}{2m + 3M} g = 3.12 \text{ m s}^{-2} \,. \tag{37}$$

Il moto di C è un moto uniformemente accelerato e quindi

$$v_C = at = \sqrt{2ha} = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + 3M}} \,, \tag{38}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 0.88 \text{ s} \,. \tag{39}$$

Si ha

$$v_C = 2.74 \text{ m/s} \,. \tag{40}$$

Se consideriamo la conservazione dell'energia, si ha

$$\begin{aligned} E_i &= T_i + V_i = 0 \,, && (41) \\ E_f &= T_f + V_i = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 - mgh \,, && (42) \\ &= \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\frac{I_C}{R^2}v_C^2 - mgh \,, && (43) \end{aligned}$$

dove $I_C = 1/2MR^2$, da cui si ricava

$$v_C = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + 3M}} = 2.74 \text{ m/s} \,, \tag{44}$$

come sopra.

2. Supponiamo adesso che la carrucola abbia una massa m_C. Ai capi della carrucola la tensione della fune cambia. Dobbiamo dividere il sistema in tre parti: il blocchetto, la carrucola e il disco.

   Abbiamo

$$m\ddot{x} = mg - T_1 \,, \tag{45}$$

   per il blocchetto. La seconda cardinale per la carrucola rispetto al centro di essa dà

$$T_1 r - T_2 r = I_C \ddot{\phi} \,. \tag{46}$$

   Infine, la seconda cardinale per il disco, rispetto al punto di contatto P, dà

$$T_2 R = I_P \ddot{\theta} = I_P \frac{\ddot{x}}{R} \,, \tag{47}$$

   Siccome la fune non può strisciare sulla carrucola, si deve avere

$$\ddot{\phi} = \frac{\ddot{x}}{R} \,. \tag{48}$$

   Utilizzando le tre equazioni si ottiene

$$mg - m\ddot{x} - \frac{I_P}{R^2}\ddot{x} = \frac{I_C}{r^2}\ddot{x} \,, \tag{49}$$

   da cui si ricava

$$\ddot{x} = a' = \frac{m}{m + I_P/R^2 + I_C/r^2} g = \frac{2m}{2m + 3M + m_C} g = 2.9 \text{ m s}^{-2} \,. \tag{50}$$

   Il moto di C è sempre un moto uniformemente accelerato con

$$v_C = a't = \sqrt{2ha'} = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + 3M + m_C}} \,, \tag{51}$$

   dove abbiamo considerato che

$$h = \frac{1}{2} a' t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a'}} = 0.91 \text{ s} \,. \tag{52}$$

   Si ha

$$v_C = 2.65 \text{ m/s} \,. \tag{53}$$

   Se consideriamo la conservazione dell'energia, si ha

$$E_i = T_i + V_i = 0 \,, \tag{54}$$

$$E_f = T_f + V_i = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} I_{carr} \omega_{carr}^2 - mgh \,, \tag{55}$$

$$= \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{I_C}{R^2} v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{I_{carr}}{r^2} v_C^2 - mgh \,, \tag{56}$$

   dove $I_C = 1/2MR^2$ e $I_C = 1/2m_C r^2$, da cui si ricava

$$v_C = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + 3M + m_C}} = 2.65 \text{ m/s} \,, \tag{57}$$

   come sopra.

Soluzione Esercizio 4

1. Disegno ...

2. La prima trasformazione, $A \to B$, è una compressione adiabatica IRREVERSIBILE. Il volume iniziale è

$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 0.0374 \text{ m}^3 = 37.4 \text{ l}\,. \tag{58}$$

La pressione, durante la compressione, passa da p_A a

$$p_B = p_A + \frac{mg}{S} = 1.196\,10^5 \text{ Pa} = 1.18 \text{ Atm}\,. \tag{59}$$

Il lavoro fatto (o subito) dal gas nella trasformazione AB si ottiene considerando il teorema delle forze vive. In A e in B si ha una situazione di equilibrio; il lavoro totale fatto sul pistone è la differenza delle energie cinetiche e quindi è nullo. Questo è costituito a sua volta dal lavoro dovuto alla pressione esterna p_A costante, a quella interna p e al lavoro della forza peso, costante. Quindi il lavoro fatto dal gas è pari a

$$L_{AB} = -(p_A \Delta V + \frac{mg}{S} \Delta h\, S) = -p_B(V_A - V_B)\,. \tag{60}$$

Applicando il primo Principio alla trasformazione AB, si ha quindi

$$đQ = 0 = dU + đL\,, \tag{61}$$

ovvero

$$n\tilde{c}_V(T_B - T_A) = -L_{AB} = p_B(V_A - V_B) = p_B\left(V_A - \frac{nRT_B}{p_B}\right)\,, \tag{62}$$

da cui si ricava

$$T_B = \frac{n\tilde{c}_V T_A + p_B V_A}{n\tilde{c}_V + nR} = \frac{n\tilde{c}_V T_A + p_B V_A}{n\tilde{c}_p} = 316.8 \text{ K}\,. \tag{63}$$

Si può quindi trovare anche

$$V_B = \frac{nRT_B}{p_B} = 0.033 \text{ m}^3 = 33 \text{ l}\,. \tag{64}$$

3. Per trovare il rendimento dobbiamo calcolare il calore assorbito e quello ceduto nel ciclo. I calori scambiati sono:

$$Q_{AB} = 0\,, \tag{65}$$
$$Q_{BC} = n\tilde{c}_V(T_C - T_B) = 2593.97 \text{ J}\,, \tag{66}$$
$$Q_{CD} = nRT_C \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = 610.85 \text{ J}\,, \tag{67}$$
$$Q_{DA} = n\tilde{c}_V(T_A - T_C) = -3117.75 \text{ J}\,. \tag{68}$$

Quindi, il sistema assorbe calore nelle trasformazioni BC e CD

$$Q_{ass} = Q_{BD} + Q_{CD} = 3204.8 \text{ J}\,, \tag{69}$$

e rilascia calore in DA

$$Q_{ced} = Q_{DA} = -3117.75 \text{ J}\,. \tag{70}$$

Il rendimento è

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}} = 0.027 \tag{71}$$