Esame 15 Febbraio 2018

Roberto Bonciani e Paolo Dore

Corso di Fisica Generale 1

Dipartimento di Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

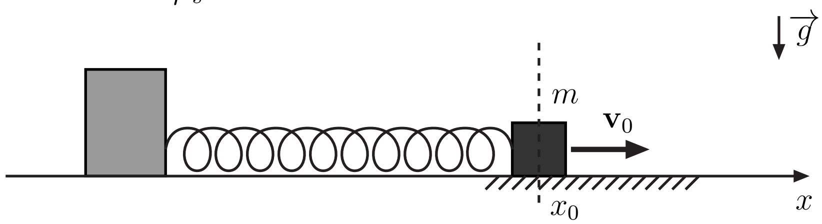
Anno Accademico 2017-2018

Regole per lo scritto:

- RECUPERO 1° ESONERO: risolvere gli esercizi 1 e 2 in 2h.
- RECUPERO 2° ESONERO: risolvere gli esercizi 3 e 4 in 2h.
- COMPITO: risolvere gli esercizi 1, 3 e 4 in 3h.

Esercizio 1 $*$

Ad una molla di costante elastica $k = 15$ N/m è attaccata una massa $m = 2$ kg che si muove su un piano orizzontale scabro. Tra massa e piano il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = 0.4$ e quello statico è $\mu_s = 0.5$.

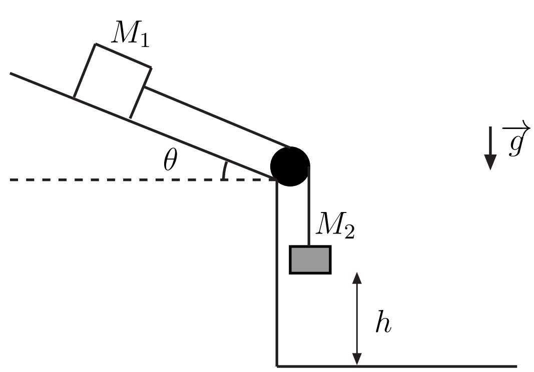


Se inizialmente la massa sta passando per la posizione di equilibrio della molla x_0 con velocità $v_0 = 1$ m/s positiva

1. si calcoli la massima elongazione Δx della molla quando la massa si arresta la prima volta;
2. si determini se dopo l'arresto la massa rimane ferma o se ritorna verso x_0;
3. se il piano viene inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo $\theta = \pi/6$ in discesa nella direzione positiva delle x, si determini il nuovo Δx.

Esercizio 2

Due corpi di massa $M_1 = 600$ g e $M_2 = 100$ g sono connessi da una fune ideale (di lunghezza opportuna) che può scorrere senza attrito su un supporto fisso, come in figura. Il piano dove è poggiato M_1 è inclinato di $\theta = 15°$ rispetto all'orizzontale ed M_2 è sospeso ad una quota $h = 60$ cm dal suolo.



Si calcoli

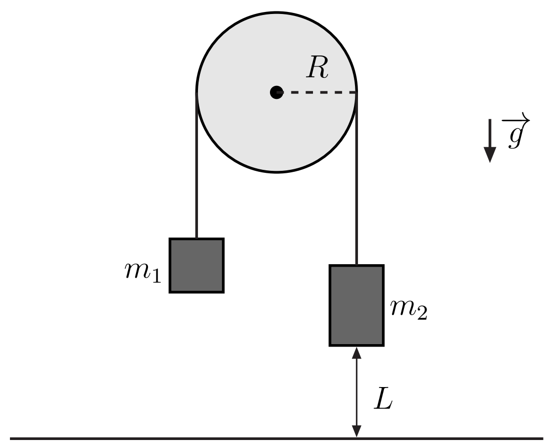
1. il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s sul piano inclinato affinché il sistema rimanga in quiete;
2. se si raddoppia la massa M_2 il sistema si mette in moto. Assumendo un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.42$, si calcoli la velocita v_1 di M_1 nell'istante in cui M_2 raggiunge il suolo.

3. Sempre nel caso del punto precedente, si calcoli il tempo impiegato da M_2 per raggiungere il suolo.

****

Esercizio 3 $*$

Due masse $m_1 = 200$ g e $m_2 = 400$ g sono fissate agli estremi di una fune ideale messa a cavallo di una carrucola (assimilabile ad un disco libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse) di raggio $R = 10$ cm.



1. Si nota che la massa m_2, inizialmente ferma, scende con accelerazione $a = 1$ m/s^2. Supponendo che la fune non scivoli sulla carrucola e trascurando tutti gli attriti, si calcoli il momento d'inerzia I_C della carrucola (specificare la massa della carrucola supponendo il disco omogeneo).

2. Se la massa m_2 dista inizialmente da terra $L = 50$cm, con che velocità tocca terra se la carrucola sperimenta un momento frenante costante di modulo pari a $\tau = 0.1$ Nm?

Esercizio 4 $*$

Una mole di gas perfetto monoatomico è in equilibrio nello stato A, con $p_A = 1$ Atm e $T_A = 300$ K. Tramite un'espansione isobara quasi statica il gas si porta nello stato B, con $V_B = 2\,V_A$. Successivamente, il gas viene messo in contatto termico con una sorgente a temperatura $T_C < T_B$ e, tramite un'isocora irreversibile, si porta all'equilibrio nello stato C. Da qui, con una trasformazione adiabatica quasi statica, torna nello stato A. Determinare:

1. la pressione p_C e la temperatura T_C del gas nello stato C;

2. il rendimento del ciclo;

3. la variazione di entropia del gas e dell'ambiente nella trasformazione BC.

Soluzione esercizio 1

1. Utilizzando il teorema delle forze vive otteniamo

$$L_{if} = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 - \mu_d mg\,\Delta x = -\frac{1}{2}mv_0^2\,. \tag{1}$$

ovvero

$$\Delta x^2 + 2\frac{\mu_d mg}{k}\Delta x - \frac{m}{k}v_0^2 = 0\,, \tag{2}$$

da cui

$$\Delta x_{12} = -\frac{\mu_d mg}{k} \pm \sqrt{\frac{\mu_d^2 m^2 g^2}{k^2} + \frac{m}{k}v_0^2}\,. \tag{3}$$

La soluzione negativa è da scartare, quindi

$$\Delta x = -\frac{\mu_d mg}{k} + \sqrt{\frac{\mu_d^2 m^2 g^2}{k^2} + \frac{m}{k}v_0^2} = 0.115 \text{ m}\,. \tag{4}$$

2. Nell'attimo in cui si ferma e si appresta a ripartire, la massa m è soggetta alla forza di richiamo elastico, pari in modulo a

$$F = k\Delta x = 1.72 \text{ N}\,, \tag{5}$$

e alla forza di attrito statico

$$f_t \leq \mu_s mg = 9.81 \text{ N}\,. \tag{6}$$

Quindi la forza d'attrito può uguagliare la forza di richiamo elastico e la massa rimane ferma.

3. Nel caso il piano sia inclinato di θ, il teorema delle forze vive dà

$$L_{if} = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 - \mu_d mg\cos\theta\,\Delta x + mg\Delta x\,\sin\theta = -\frac{1}{2}mv_0^2\,. \tag{7}$$

ovvero

$$\Delta x^2 + 2\frac{mg}{k}(\mu_d\cos\theta - \sin\theta)\Delta x - \frac{m}{k}v_0^2 = 0\,, \tag{8}$$

da cui

$$\Delta x_{12} = -\frac{mg}{k}(\mu_d\cos\theta - \sin\theta) \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}(\mu_d\cos\theta - \sin\theta)^2 + \frac{m}{k}v_0^2}\,. \tag{9}$$

La soluzione negativa è da scartare, quindi

$$\Delta x = -\frac{mg}{k}(\mu_d\cos\theta - \sin\theta) + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}(\mu_d\cos\theta - \sin\theta)^2 + \frac{m}{k}v_0^2} = 0.618 \text{ m}\,. \tag{10}$$

Soluzione esercizio 2

1. Indicando con T il modulo della tensione della fune, scriviamo il secondo principio per M_1 e M_2 separatamente. Per M_1, preso un sistema di riferimento con le x lungo il piano inclinato e indicata con F_t la forza d'attrito, si ha:

$$\begin{aligned} T + M_1 g \sin\theta - F_t &= 0\,, && (11)\\ N &= M_1 g \cos\theta\,, && (12) \end{aligned}$$

   e inoltre sappiamo che

$$F_t \leq \mu_s M_1 g \cos\theta\,. \tag{13}$$

   Per la massa M_2 abbiamo

$$T = M_2 g\,. \tag{14}$$

   Quindi

$$M_2 g + M_1 g \sin\theta = F_t \leq \mu_s M_1 g \cos\theta\,, \tag{15}$$

   da cui si ricava

$$\mu_s \geq \frac{M_2 + M_1 \sin\theta}{M_1 \cos\theta} = 0.44\,. \tag{16}$$

2. Utilizziamo il teorema delle forze vive (i rappresenta la configurazione iniziale e f quella finale). Avremo:

$$L_{if} = V_i - V_f + \int_i^f \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} = T_f - T_i\,, \tag{17}$$

   dove

$$\begin{aligned} V_i - V_f &= M_1 g h \sin\theta + (2M_2) g h\,, && (18)\\ T_i &= 0\,, && (19)\\ T_f &= \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2}(2M_2) v_1^2\,, && (20)\\ \int_i^f \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} &= -\mu_d M_1 g \cos\theta h\,. && (21) \end{aligned}$$

   Quindi

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh[M_1(\sin\theta - \mu_d \cos\theta) + 2M_2]}{(M_1 + 2M_2)}} = 1.28 \text{ m/s}\,. \tag{22}$$

3. L'accelerazione a con cui M_1 o $2M_2$ si muovono è data dalla

$$(M_1 + 2M_2) a = 2M_2 g + M_1 g \sin\theta - \mu_d M_1 g \cos\theta\,, \tag{23}$$

   cioè:

$$a = \frac{M_1(\sin\theta - \mu_d \cos\theta) + 2M_2}{M_1 + 2M_2} g = 1.37 \text{ m} \quad \text{s}^{-2}\,. \tag{24}$$

   Quindi il moto è uniformemente accelerato e per coprire il tratto h, il tempo necessario è

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 0.94 \text{ s}\,. \tag{25}$$

Soluzione esercizio 3

1. Dato che il filo non striscia sulla carrucola, si può scrivere l'eq del moto per il sistema utilizzando la relazione fra accelerazione di m_1 e m_2 e accelerazione angolare della carrucola
$$a = R\ddot{\theta}\,. \tag{26}$$
Si ha
$$(m_1 + m_2)a + I_C \frac{a}{R^2} = (m_2 - m_1)g\,, \tag{27}$$
da cui
$$I_C = (m_2 - m_1)\frac{gR^2}{a} - (m_1 + m_2)R^2 = 1.36 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \quad \text{m}^2\,. \tag{28}$$
Inoltre
$$M = \frac{2I_c}{R^2} = 2.72\ \text{kg}\,. \tag{29}$$

2. Utilizziamo il teorema delle forze vive:
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I_C\frac{v^2}{R^2} = (m_2 - m_1)gL - \tau\theta\,, \tag{30}$$
dove $\theta = L/R$, da cui
$$v = \sqrt{\frac{2\left((m_2 - m_1)gL - \tau\frac{L}{R}\right)}{m_1 + m_2 + \frac{I_C}{R^2}}} = 0.5\ \text{m/s}\,. \tag{31}$$

Soluzione esercizio 4

1. Troviamo il volume V_A. Dall'equazione di stato del gas perfetto abbiamo:
$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 24.62\ \text{l}\,, \tag{32}$$
quindi
$$V_B = 2V_A = 49.24\ \text{l} \tag{33}$$
e
$$T_B = \frac{p_A V_B}{R} = 2\,\frac{p_A V_A}{R} = 2\,T_A = 600\ \text{K}\,. \tag{34}$$
Essendo A e C su un'adiabatica quasi statica, si ha
$$p_C V_C^\gamma = p_A V_A^\gamma\,, \tag{35}$$
con $\gamma = 5/3$, ovvero
$$p_C = p_A\left(\frac{V_A}{V_C}\right)^\gamma = p_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = p_A\left(\frac{1}{2}\right)^\gamma = 0.31\ \text{Atm}\,. \tag{36}$$
Infine
$$T_C = \frac{p_C V_C}{R} = \frac{2p_C V_A}{R} = 2T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = 189.0\ \text{K}\,. \tag{37}$$

2. Abbiamo

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}}\,, \tag{38}$$

dove

$$\begin{aligned} Q_{ass} &= Q_{AB}\,, &(39)\\ Q_{ced} &= Q_{BC}\,. &(40)\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= \int_A^B (dU + pdV) = \tilde{c}_V(T_B - T_A) + p_A(V_B - V_A) = \tilde{c}_p(T_B - T_A)\,, &(41)\\ Q_{BC} &= \tilde{c}_V(T_C - T_B)\,. &(42)\end{aligned}$$

Quindi

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_B - T_C}{T_B - T_A} = 0.18\,. \tag{43}$$

3. Non possiamo integrare l'integrale di Clausius lungo la trasformazione irreversibile, ma possiamo considerare una isocora reversibile. Quindi, la variazione di entropia del gas è pari a

$$\Delta S_{BC}^{gas} = S(C) - S(B) = \tilde{c}_V \ln\frac{T_C}{T_B} = -14.4\ \mathrm{J/K}\,. \tag{44}$$

La sorgente acquista il calore ceduto dal gas. La sua variazione di entropia, quindi, è data da

$$\Delta S_{BC}^{sor} = -\int_B^C \frac{đQ}{T} = -\frac{1}{T_C}\int_B^C đQ = -\frac{Q_{BC}}{T_C} = \tilde{c}_V\frac{T_B - T_C}{T_C} = 27.1\ \mathrm{J/K}\,. \tag{45}$$