Esame 15 Novembre 2021

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2020-2021

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
15 Novembre 2021

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (8 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos\theta} d\theta \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (7 pt)
Discutere le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \,, \tag{2}$$

e svilupparla in serie di potenze in $z_0 = 0$, nelle varie regioni del piano complesso.

Esercizio 3 (6 pt)
Si consideri la seguente regola ricorsiva

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{3}y_n \,, \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{2}y_n \,, \tag{3}$$

con $x_0 = 0.5$ e $y_0 = 0.5$. Si calcoli x_N con $N = 10^5$.

Esercizio 4 (9 pt)
Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) + g(x) \tag{4}$$

ove $0 \le x < 2\pi$ con $f(x,t)$ periodica e derivabile con derivata continua,

$$g(x) = \cos 4x + 2\sin 5x \ \ , \quad f(x,0) = \sin x - 3\sin 3x + \cos x + 5\cos 3x \,. \tag{5}$$

Soluzione Es. 1

Passiamo alla variabile complessa z sulla circonferenza unitaria:

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta}\,, && (6)\\ d\theta &= -i\frac{dz}{z}\,, && (7)\\ \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\,, && (8)\\ \cos(3\theta) &= \frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2} = \frac{z^3}{2}+\frac{1}{2z^3}\,, && (9)\\ & && (10)\end{aligned}$$

con le quali l'integrale diventa

$$I = -i\int_\gamma \left(\frac{z^3}{2}+\frac{1}{2z^3}\right)\frac{dz}{z\left[5-4\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)\right]} = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{z^6+1}{z^3(2z^2-5z+2)}dz\,, \tag{11}$$

dove γ è la circonferenza unitaria. Il denominatore dell'integrando si annulla in $z=0$ (polo triplo) e in

$$2z^2-5z+2=0\,, \tag{12}$$

ovvero $z=2$ e $z=\frac{1}{2}$.

Per il teorema dei residui si ha

$$I = 2\pi i \sum_{z_0=0,\frac{1}{2}} Res(f(z),z_0)\,, \tag{13}$$

dove

$$f(z) = \frac{i}{2}\frac{z^6+1}{2z^3(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\,. \tag{14}$$

Si ha

$$\begin{aligned} Res(f(z),0) &= \frac{21}{16}i\,, && (15)\\ Res(f(z),1/2) &= -\frac{65}{48}i\,. && (16)\end{aligned}$$

Quindi

$$I = 2\pi i\left(\frac{21}{16}i-\frac{65}{48}i\right) = \frac{\pi}{12}\,. \tag{17}$$

Soluzione Es. 2

Abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}\,. \tag{18}$$

Quindi, la $f(z)$ ha due singolarità polari in $z = 2$ e $z = 3$ (poli singoli). Nel punto all'infinito invece la $f(z)$ è regolare. Infatti ponendo $z \to \frac{1}{\zeta}$ si ha

$$f(\zeta) = \frac{\zeta^2}{(1-2\zeta)(1-3\zeta)}\,, \tag{19}$$

che ha uno zero doppio per $\zeta \to 0$.

Per $|z| < 2$ la funzione $f(z)$ è analitica e può essere sviluppata in serie di Taylor in $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{(z-2)} = -\frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} + \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\,. \tag{20}$$

Nella regione $2 < |z| < 3$ abbiamo un'espansione di Laurent:

$$f(z) = -\frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{(n+1)}} \tag{21}$$

Nella regione $|z| > 3$ si ha:

$$f(z) = \frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3^n-2^n)}{z^{(n+1)}}\,. \tag{22}$$

Soluzione Es. 3

È immediato vedere che per la somma $S_n = x_n + y_n$ si ha

$$S_{n+1} = \frac{5}{6}S_n\,. \tag{23}$$

Quindi

$$S_N = \left(\frac{5}{6}\right)^N S_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^N\,. \tag{24}$$

Poiché $x_0 = y_0$, è facile vedere che $x_n = y_n$ e quindi

$$x_N = \left(\frac{5}{6}\right)^N x_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^N \frac{1}{2}\,. \tag{25}$$

Alternativamente si può studiare il problema nella forma

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathcal{A}\mathbf{v}_n\ ,\ \ \mathbf{v} = (x,y)\ ,\ \ A_{11} = A_{22} = \frac{1}{2}\ ,\ \ A_{12} = A_{21} = \frac{1}{3}\,, \tag{26}$$

trovare autovalori ed autovettori di $\mathcal{A}$ etc etc ...

Soluzione Es. 4

Sviluppiamo $f(x,t)$ in serie di Fourier

$$f(x,t) = \sum_{n=1} \Big(a_n(t) \cos nx + b_n(t) \sin nx \Big) \,, \tag{27}$$

si ha

$$\frac{d}{dt} a_n = -n^2 a_n + \delta_{n4} \,, \quad \frac{d}{dt} b_n = -n^2 b_n + 2\delta_{n5} \,. \tag{28}$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali si capisce che basta considerare solo $n = 1$, $n = 3$, $n = 4$ ed $n = 5$:

$$\begin{aligned} & a_1(t) = a_1(0) e^{-t} \,, \ a_3(t) = a_3(0) e^{-9t} \,, \ b_1(t) = b_1(0) e^{-t} \,, \ b_3(t) = b_3(0) e^{-9t} \,, \\ & b_5(t) = 2 \frac{1 - e^{-25t}}{25} \,, \ a_4 = \frac{1 - e^{-16t}}{16} \,. \end{aligned} \tag{29}$$

Quindi

$$f(x,t) = e^{-t} \sin x - 3e^{-9t} \sin 3x + e^{-t} \cos x + 5e^{-9t} \cos 3x + \frac{1 - e^{-16t}}{16} \cos 4x + 2 \frac{1 - e^{-25t}}{25} \sin 5x \,. \tag{30}$$