Esame 16 Gennaio 2023

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2021-2022

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
16 Gennaio 2023

NOTA: $\boxed{\textbf{GLI ESERCIZI VANNO CONSEGNATI SU 2 FOGLI DISTINTI}}$

$\boxed{\textbf{Es.1 e Es.2 su uno}} \longleftrightarrow \boxed{\textbf{Es.3 e Es.4 sull'altro}}$

SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA. Esempio "D. Hilbert, 23011862."

Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (9 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = PV \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{4 - x^2} dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{e^{2iz} - 1} \tag{2}$$

e calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma f(z)\, dz \,, \tag{3}$$

dove $\gamma \,:\, 2\pi + e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, circonferenza di raggio unitario centrata in $z = 2\pi$ percorsa in senso antiorario.

Esercizio 3 (5 pt)
Data la regola ricorsiva

$$x_{n+1} = a x_n + b y_n \ , \ y_{n+1} = b x_n + a y_n \ , \tag{4}$$

trovare i valori di a e b reali tali che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \tag{5}$$

per ogni valore di x_0 e y_0.

Esercizio 4 (10 pt)
Si consideri l'operatore lineare $\mathcal{A}$

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\,\mathbf{x} \ , \ y_n = \sum_j A_{nj} x_j \tag{6}$$

ove

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_{N-1}) \ , \ \mathbf{y} = (y_0, y_1, ..., y_{N-1}) \quad , \quad x_n \in C \ , \ y_n \in C \, , \tag{7}$$

e

$$A_{nj} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i \frac{2\pi}{N} nj} \ . \tag{8}$$

1. Mostrare che $\mathcal{A}$ e' un operatore unitario.
2. Mostrare che $\mathcal{A}^k$ e' un operatore unitario per $k = 2, 3, ...$

Soluzione Es. 1

Siccome la funzione è pari possiamo porre

$$I = \frac{1}{2}\, PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \Re\left\{ PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{4-x^2} dx \right\}. \tag{9}$$

Consideriamo la funzione

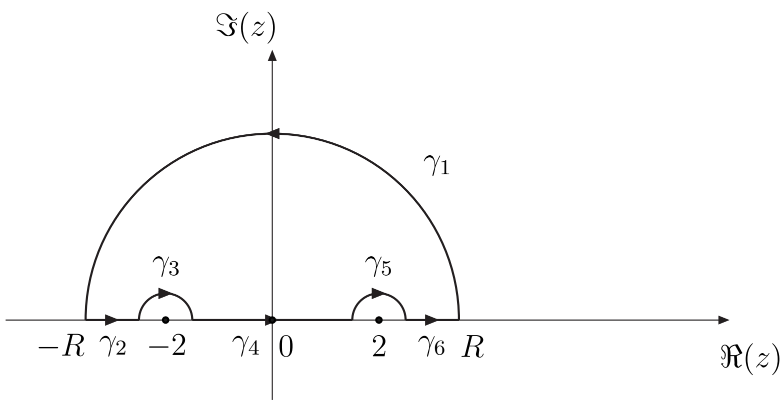
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{4-z^2}\,, \tag{10}$$

che è analitica nel piano complesso tranne nei due punti

$$4 - z^2 = 0 \Longrightarrow z = \pm 2\,, \tag{11}$$

che sono due poli semplici sul cammino d'integrazione.

Possiamo integrare $f(z)$ su un cammino chiuso $\gamma = \sum_{i=1}^{6} \gamma_i$ costituito come in figura



Per il teorema di Cauchy si ha

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{\gamma} f(z)\, dz = 0\,. \tag{12}$$

D'altra parte:

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{\gamma} f(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \sum_{i=3,5} \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz + PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{4-x^2}\,. \tag{13}$$

Inoltre:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{4-z^2} = 0\,, \tag{14}$$

per il lemma di Jordan. Per il lemma degli archi infinitesimi, invece, si ha:

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{4-z^2} = -i\pi \operatorname{Res}(f,-2) = -i\pi \lim_{z\to -2} (z+2) f(z) = -i\pi \left(\frac{e^{-2i}}{4} \right)\,, \tag{15}$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_5} \frac{e^{iz}}{4-z^2} = -i\pi \operatorname{Res}(f,2) = -i\pi \lim_{z\to 2} (z-2) f(z) = -i\pi \left(-\frac{e^{2i}}{4} \right)\,. \tag{16}$$

In totale si ha

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{4-x^2} = i\pi \left(-\frac{e^{2i}}{4} + \frac{e^{-2i}}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \sin{(2)}\,. \tag{17}$$

Quindi:

$$I = \frac{\pi}{4} \sin{(2)}\,. \tag{18}$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ ha, al finito, singolarità polari (poli singoli) in corrispondenza dell'annullarsi del denominatore. Bisogna pero' vedere se in quei punti il numeratore non si annulli a sua volta. Si ha

$$e^{2iz} - 1 = 0 \quad \Rightarrow e^{2iz} = e^{2k\pi i} \quad \Rightarrow z = k\pi\,. \tag{19}$$

D'altra parte il numeratore si annulla per

$$\frac{z}{2} = \frac{\pi}{2} + k'\pi \quad \Rightarrow z = \pi + 2k'\pi\,. \tag{20}$$

In totale, si ha una singolarità polare del primo ordine per ogni k, tranne quando $\pi(1+2k') = \pi k$ ovvero

$$k = 2k' + 1\,. \tag{21}$$

Quindi, $f(z)$ ha una singolarità polare del primo ordine per $z = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. In corrispondenza dei k dispari, $z = \pi$, $z = 3\pi$, $z = 5\pi$ .... etc, si hanno singolarità rimovibili che, una volta incluso nella definizione della funzione il limite della funzione in questi punti, costituiscono punti di analiticità.

Il punto $z = 2\pi$ è un polo singolo per $f(z)$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, 2\pi) = 2\pi i \left(\frac{i}{2}\right) = -\pi\,. \tag{22}$$

Nel punto all'infinito si ha

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2\omega}\right)}{e^{\frac{2i}{\omega}} - 1}\,. \tag{23}$$

Quindi il punto all'infinito ($\omega \to 0$) è una singolarità essenziale per $f(z)$.

Soluzione Es. 3

Possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\,.$$

Per avere

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

per ogni x_0 e y_0 gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

devono essere in modulo minori di 1, il calcolo e' immediato:

$$(a-\lambda)^2 - b^2 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = a \pm b$$

quindi si deve avere $|a+b| < 1$ e $|a-b| < 1$.

Soluzione Es. 4

L'operatore $\mathcal{A}$ e' unitario se

$$\mathcal{A}\,\mathcal{A}^* = \mathcal{I}$$

in forma esplicita

$$\sum_k A_{nk}(A^*)_{kn'} = \delta_{nn'}$$

ove

$$(A^*)_{kn'} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'} \,,$$

Quindi si deve avere

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{i\frac{2\pi}{N}k(n-n')} = \delta_{nn'} \,, \tag{1}$$

per $n = n'$, la condizione (1) e' banale. Nel caso $n \neq n'$, ricordando l'identita'

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{1-x^N}{1-x} \ , \ x \neq 1$$

con $x = e^{i\frac{2\pi}{N}(n-n')}$, si vede che la (1) e' soddisfatta, infatti per ogni $n - n'$ intero non nullo si ha

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{N}(n-n')}\right)^N = e^{i2\pi(n-n')} = 1 \,.$$

* Punto b): si deve mostrare che $\mathcal{A}^k$ e' unitario cioe'

$$\mathcal{A}^k \left(\mathcal{A}^k\right)^* = \mathcal{I}$$

cominciamo con il caso $k = 2$

$$\mathcal{A}^2 \left(\mathcal{A}^2\right)^* = \mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\Big(\mathcal{A}\mathcal{A}^*\Big)\mathcal{A}^*$$

poiché $\mathcal{A}\,\mathcal{A}^* = \mathcal{I}$ si ha il risultato, per $k = 3, 4, ...$ si procede nello stesse modo.