Esame 16 Novembre 2020

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2019-2020

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
16 Novembre 2020 – in remoto

Esercizio 1 (9 pt)
Calcolare, con tecniche di analisi complessa, il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2\theta)}{1+\sin\theta}\, d\theta \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (6 pt)
Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = \sin x \left(e^{ay} + e^{-y}\right) \tag{2}$$

è la parte reale di una funzione $f(z)$ analitica in tutto $\mathbb{C}$. Trovare le funzioni $f(z)$ nei diversi casi.

Esercizio 3 (6 pt)
Si consideri la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \tag{3}$$

trovare i valori di a e b per i quali esiste la matrice inversa $\mathcal{A}^{-1}$ e calcolare, con un metodo a piacere, $\mathcal{A}^{-1}$.

Esercizio 4 (9 pt)
Si consideri l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \alpha f(x,t) - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z,t)\frac{1}{1+y^2}\delta(x-y-z)\, dy\, dz \,, \tag{4}$$

con $-\infty < x < \infty$ e condizione iniziale

$$f(x,0) = \sin x - 4\cos 3x \,, \tag{5}$$

determinare i valori di α tali che

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t) = 0 \,. \tag{6}$$

Soluzione Es. 1

Si passa all'integrazione sulla circonferenza di raggio 1. Abbiamo

$$\sin^2(2\theta) = \left(\frac{z^2 - \frac{1}{z^2}}{2i}\right)^2 = -\frac{(z^4-1)^2}{4z^4}\,, \tag{7}$$

$$1+\sin\theta = 1 + \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2+2i\,z-1}{2i\,z} = \frac{(z+i)^2}{2i\,z}\,, \tag{8}$$

$$d\theta = -i\frac{dz}{z}\,. \tag{9}$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2\theta)}{1+\sin\theta}\,d\theta = \int_\gamma f(z)\,dz\,, \tag{10}$$

dove $\gamma = e^{it}$, con $0 \le t \le 2\pi$ e

$$f(z) = -\frac{(z^4-1)^2}{2z^4(z+i)^2} = -\frac{(z-i)^2(z^2-1)^2}{2z^4}\,. \tag{11}$$

La $f(z)$ ha quindi un polo di ordine 4 in $z=0$, interno alla circonferenza su cui stiamo integrando. Utilizzando il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,Res(f,0) = 4\pi\,, \tag{12}$$

poiché

$$Res(f,0) = -2i\,. \tag{13}$$

Soluzione Es. 2

Per essere la parte reale di una funzione analitica, la $u(x,y)$ deve essere armonica. Si ha

$$u_x(x,y) = \cos x\left(e^{ay}+e^{-y}\right)\,, \tag{14}$$

$$u_{xx}(x,y) = -\sin x\left(e^{ay}+e^{-y}\right)\,, \tag{15}$$

$$u_y(x,y) = \sin x\left(ae^{ay}-e^{-y}\right)\,, \tag{16}$$

$$u_{yy}(x,y) = \sin x\left(a^2e^{ay}+e^{-y}\right)\,. \tag{17}$$

Quindi

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y) = \sin x\left(a^2-1\right)e^{ay} = 0\,, \tag{18}$$

ovvero

$$a = \pm 1\,. \tag{19}$$

Usando le relazioni di Cauchy-Riemann si ha

$$v_x = -u_y = -\sin x\left(ae^{ay}-e^{-y}\right) \tag{20}$$

e/o

$$v_y = u_x = \cos x \left(e^{ay} + e^{-y}\right) \ , \tag{21}$$

con $a = \pm 1$. Quindi si ha

$$v(x,y) = \cos x \left(\pm e^{\pm y} - e^{-y}\right) + c \, . \tag{22}$$

Le funzioni analitiche saranno date da

$$f(z) = \sin x \left(e^{\pm y} + e^{-y}\right) + i \cos x \left(\pm e^{\pm y} - e^{-y}\right) + k \tag{23}$$

Nel caso $a = 1$ si ha

$$f(z) = ie^{-ix}e^{y} - ie^{ix}e^{-y} + k = -i(e^{iz} - e^{-iz}) + k = 2 \, \sin z + k \, . \tag{24}$$

Nel caso $a = -1$ si ha

$$f(z) = -2ie^{ix}e^{-y} + k = -2ie^{iz} + k \, . \tag{25}$$

Soluzione Es. 3

Dal calcolo degli autovalori si ha che l'inversa esiste se $a \neq 0$ a $a \neq \pm 1$.
Scrivendo $\mathcal{A}$ nella forma

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$$

con

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

utilizzando la formula

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 ...$$

e notando che $\mathcal{B}^2 = 0$ ed inoltre $\mathcal{A}_0$ commuta con $\mathcal{B}$ é immediato trovare

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}_0^{-1}\left(\mathcal{I} + \mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{B}\right)^{-1} = \mathcal{A}_0^{-1} - \mathcal{A}_0^{-2}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{b}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Alternativamente si puó usare Cayley-Hamilton. Notare che anche se $\mathcal{A}$ é nominalmente una matrice 3×3, di fatto si riconduce ad una matrice 2×2, questo semplifica (un po') i calcoli.

Soluzione Es. 4

Per prima cosa notiamo che eliminando la delta l'integrale doppio diventa un prodotto di convoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z,t) g(x-z) \, dz \quad , \quad g(x-z) = \frac{1}{1+(x-z)^2} \, .$$

Passando in trasformata di Fourier, usando il teorema di convoluzione si ha

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(k,t) = \alpha\hat{f}(k,t) - \sqrt{2\pi}\hat{f}(k,t)\hat{g}(k)\,,$$

con un semplice calcolo con i residui si trova

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}g(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|} \quad .$$

Abbiamo quindi

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(k,t) = (\alpha - \pi e^{-|k|})\,\hat{f}(k,t) \quad \to \quad \hat{f}(k,t) = e^{(\alpha-\pi e^{-|k|})t}\,\hat{f}(k,0)\,,$$

per avere $\lim_{t\to\infty} f(x,t) = 0$ si deve richiedere che per tutti i k coinvolti nella condizione iniziale deve valere

$$\alpha - \pi e^{-|k|} < 0\ ,$$

nella condizione iniziale appaiono $|k| = 1$ e $|k| = 3$ quindi

$$\alpha < \pi e^{-3}\,.$$