Esame 17 Gennaio 2022

Roberto Bonciani, Angelo Vulpiani

Corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2020-2021

Esame scritto – Modelli e Metodi Matematici della Fisica
17 Gennaio 2022

NOTA: Gli esercizi vanno consegnati su due fogli distinti: Es.1 e 2 su uno ed Es.3 e 4 sull'altro. SCRIVERE IN MODO LEGGIBILE SU ENTRAMBI I FOGLI COGNOME, E NUMERO DI MATRICOLA.
Esempio "D. Hilbert, 23011862."
Durante l'esame si può consultare UN SOLO libro di testo; né appunti, né quaderni, né eserciziari.

Esercizio 1 (8 pt)
Usando tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 2ix - 2} dx \,. \tag{1}$$

Esercizio 2 (7 pt)
Discutere le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{z-1} \,, \tag{2}$$

calcolare

$$\int_\gamma f(z)\, dz \,, \tag{3}$$

con $\gamma = 1 + e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, e sviluppare $f(z)$ in serie di Laurent in $z = 1$.

Esercizio 3 (7 pt)
Data la regola di ricorrenza

$$x_{t+1} = a x_t + y_t \ \ , \ \ y_{t+1} = \frac{1}{2} y_t + 1 \,, \tag{4}$$

ove $|a| < 1$, $(x_0, y_0) = (1, 4)$ calcolare

$$\lim_{t\to\infty} x_t \,. \tag{5}$$

Esercizio 4 (8 pt)
Si consideri l'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -e^{-t} \partial_x f(x,t) + 2e^{-x^2} \delta(t^2 + 2t) \,, \tag{6}$$

con x sulla retta e condizione iniziale

$$f(x, t = -0.5) = 0 \,. \tag{7}$$

Calcolare

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t) \,. \tag{8}$$

Soluzione Es. 1

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 2iz - 2} = \frac{e^{iz}}{[z-(i-1)][z-(i+1)]}\,, \tag{9}$$

che è analitica tranne in

$$z = z_{\pm} = \pm 1 + i\,. \tag{10}$$

Consideriamo l'integrale

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz\,, \tag{11}$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2\,, & \quad (12)\\ \gamma_1 &= x\,, \qquad -R \leq x \leq R\,, & \quad (13)\\ \gamma_2 &= Re^{i\theta}\,, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi\,. & \quad (14) \end{aligned}$$

Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\,\left[\mathrm{Res}\,(f, z_+) + \mathrm{Res}\,(f, z_-)\right]\,, \tag{15}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(f, z_+) &= -\frac{e^{-i}}{2e}\,, & \quad (16)\\ \mathrm{Res}\,(f, z_-) &= \frac{e^{i}}{2e}\,. & \quad (17) \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma} f(z)\,dz = I + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,. \tag{18}$$

Per il lemma di Jordan si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0\,. \tag{19}$$

In totale, quindi, si ha

$$I = 2\pi i \left(-\frac{e^{-i}}{2e} + \frac{e^{i}}{2e}\right) = -\frac{2\pi}{e}\left(\frac{e^{i} - e^{-i}}{2i}\right) = -\frac{2\pi}{e}\sin(1)\,. \tag{20}$$

Soluzione Es. 2

La funzione $f(z)$ è analitica tranne che in $z = 1$ e nel punto all'infinito. In $z = 1$ ha un polo singolo. Il punto all'infinito è un punto di non analiticità, come si vede studiando la funzione

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{\omega \sin\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}{1-\omega} \tag{21}$$

nel limite di piccolo ω.

Lo sviluppo di Laurent di $f(z)$ in $z=1$ si può ottenere come segue. Facciamo un cambio di variabile

$$z-1=\xi\,, \tag{22}$$

con cui si riesprime la $f(z)$ come

$$f(\xi)=\frac{1}{\xi}\sin\left(\frac{\pi}{2}(\xi+1)\right)=\frac{1}{\xi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right). \tag{23}$$

Quindi

$$f(\xi)=\frac{1}{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\frac{\xi^{2k}}{(2k)!}\,, \tag{24}$$

ovvero

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi^{2k}}{2^{2k}(2k)!}\right)(z-1)^{2k-1}\sim\frac{1}{z-1}-\frac{\pi^2}{8}(z-1)+... \tag{25}$$

Per il teorema di Cauchy si ha

$$\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\mathrm{Res}(f,1)=2\pi i\,. \tag{26}$$

Soluzione Es. 3

Notare che il punto fisso della regola ricorsiva e'

$$(x^*,y^*)=\left(\frac{2}{1-a},2\right)$$

scrivendo $x=u-x^*$, $y=v-y^*$ abbiamo

$$\begin{pmatrix}u_{t+1}\\ v_{t+1}\end{pmatrix}=\mathcal{A}\begin{pmatrix}u_t\\ v_t\end{pmatrix}\ ,\ \mathcal{A}=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Notando che

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{B}\,,\,\mathcal{A}_0=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\,,\,\mathcal{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\,,$$

poiché $\mathcal{B}^n=0$ se $n\geq 2$ si ha

$$\mathcal{A}^n=\mathcal{A}_0^n+n\mathcal{A}_0^{n-1}\mathcal{B}$$

ricordando che $|a|<1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}^n=0\,,$$

$$\lim_{t\to\infty}u_t=\lim_{t\to\infty}v_t=0$$

e quindi

$$\lim_{t\to\infty}x_t=\frac{2}{1-a}\,.$$

Alternativamente possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \mathcal{A}^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{t-1} \mathcal{A}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

utilizzando la struttura della matrice $\mathcal{A}^n$ e' facile arrivare a lo stesso risultato.
Ancora piu' semplice: iterando l'equazione per la y_t si ha

$$y_t = 2^{-t} y_0 + 2^{-t+1} + 2^{-t+2} + ... + 2^{-2} + 2^{-1} + 1$$

etc etc

Soluzione Es. 4

Nell'intervallo $t \in (-0.5, -\epsilon)$ si ha $f(x,t) = 0$, usando le proprieta' della delta di Dirac al tempo $t = \epsilon$ si ha

$$f(x,\epsilon) = e^{-x^2} \, .$$

Per $t > 0$ il problema si riduce all'equazione

$$\partial_t f(x,t) = -e^{-t}\partial_x f(x,t)$$

e condizione iniziale

$$f(x,0) = g(x) = e^{-x^2} \, .$$

Usando la trasformata di Fourier si ottiene

$$\frac{d}{dt}\hat{f}_k(t) = -ike^{-t}\hat{f}_k(t) \ , \ \hat{f}_k(t) = e^{ik(-1+e^{-t})}\hat{f}_k(0)$$

ricordando le proprieta' delle trasformate delle trasformate di Fourier si ha

$$f(x,t) = g(x-1+e^{-t}) = e^{-(x-1+e^{-t})^2}$$

quindi

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t) = e^{-(x-1)^2}$$